

## **O GEOGEBRA 3D NA CONSTRUÇÃO DA PIRÂMIDE A PARTIR DE SEU TRONCO: REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**

AUTORES: José Carlos Pinto Leivas<sup>1</sup>

Anne Desconsi Hasselmann Bettin<sup>2</sup>

Valdir Pretto<sup>3</sup>

DIRECCIÓN PARA CORRESPONDENCIA: [leivasjc@unifra.br](mailto:leivasjc@unifra.br)

Fecha de recepción: 12 - 09 - 2017

Fecha de aceptación: 19 - 10 - 2017

### RESUMO

Neste trabalho, apresenta-se o resultado de uma pesquisa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, a qual buscou abordar o conteúdo de pirâmides, por meio de um problema gerador com alunos de três turmas do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública Estadual do Rio Grande do Sul. Teve como objetivo analisar a mobilização dos Registros de Representação Semiótica a partir do tronco da pirâmide, com o uso do Geogebra 3D, por meio de atividades que levam em consideração o conhecimento prévio do aluno e o uso de material manipulável. A pesquisa, de natureza qualitativa e exploratória, teve como referencial teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e a coleta de dados consistiu das construções dos alunos em material concreto, de registros fotográficos e do protocolo de construção constante do Geogebra. A análise e os resultados evidenciaram que as atividades contribuíram para revisar conceitos básicos de geometria, para a construção e compreensão de novos conceitos, de forma mais atrativa, na obtenção da pirâmide e estimular a visualização do objeto em diferentes formas de representação, além da aprendizagem de novos conteúdos.

**PALAVRAS-CHAVE:** Geometria; Registros de Representação Semiótica; Tronco de Pirâmide; Geogebra.

### **THE GEOGEBRA 3D IN THE CONSTRUCTION OF THE PYRAMID FROM THEIR TRUNK: RECORDS OF SEMIOTIC REPRESENTATION**

#### ABSTRACT

This paper presents the results of a Master's thesis research in Science and Mathematics Teaching, which sought to approach the content of pyramids through a generative problem, for the introduction of this content, with

---

<sup>1</sup> Licenciado em Matemática. Especialista em Análise Matemática. Mestre em Matemática Pura e Aplicada. Doutor em Educação Matemática. Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática. Centro Universitário Franciscano de Santa Maria. Brazil.

<sup>2</sup> Licenciada em Matemática. Mestre em Ensino de Matemática. Professora da escola básica brasileira. Professora da Rede de Ensino do Rio Grande do Sul. Brazil. E-mail: [nanydh@yahoo.com.br](mailto:nanydh@yahoo.com.br)

<sup>3</sup> Doutor. Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Centro Universitário Franciscano de Santa Maria. Brazil. E-mail: [pretto@gmail.com.br](mailto:pretto@gmail.com.br)

students from three classes of the third Year of the High School of a state public school. The aim of this study was to analyze the mobilization of the Semiotic Representation Registers from the trunk of the pyramid with the use of 3D Geogebra, through activities that take into account the previous knowledge of the student, the use of manipulative material and the use of software of Dynamic geometry. This qualitative and exploratory research was based on Duval's Theory of Semiotic Representation Registers. The analysis of the records showed that the proposed activities contributed to revise basic concepts of geometry, to construct and understand new concepts in a more attractive way, stimulating the visualization of the object in different forms of representation and learning.

**KEYWORDS:** Geometry; Registers of Semiotic Representation; Pyramid Trunk; Geogebra.

## INTRODUÇÃO

A geometria espacial é um campo da Matemática que estuda as figuras geométricas no espaço, sendo constantemente usada para resolver problemas do cotidiano, além de colaborar para o desenvolvimento geral do indivíduo. Segundo Cardoso (2012, p.04), “os conhecimentos em geometria são importantes para o ser humano, tanto para sua vivência cotidiana, quanto pelo aspecto instrumental desses conhecimentos na construção do pensamento lógico e desenvolvimento das capacidades dedutivas”.

Como professora do Ensino Médio, uma autora deste trabalho tem percebido algumas dificuldades no estudo da geometria espacial e na visualização das formas tridimensionais pelos alunos, principalmente no estudo de pirâmides. Pensando nisso, buscou-se, por meio de um problema gerador, ou seja, uma caixa de sabonete em formato de tronco de pirâmide, verificar dificuldades dos alunos e contribuições do Geogebra para a aprendizagem desse conteúdo. Foram utilizadas atividades que levaram em consideração o conhecimento prévio do aluno, seu raciocínio na construção com material manipulável e o uso do Geogebra 3D, o qual serviu de estímulo e motivação inicial para provocar a curiosidade do aluno, o confronto de ideias e a busca de novas estratégias para a representação de objetos espaciais.

A respeito de problemas geradores, Diogo (2007, p.05) afirma que “o desempenho dos alunos, durante as atividades, a visualização por parte deles de que o novo estudo é justificado e a produção que se origina a partir desse estudo apontam que o procedimento é eficiente na abordagem de um conteúdo novo em Matemática”.

Pela combinação das atividades diversificadas, buscou-se associar o conteúdo a algo do cotidiano e dar sentido a conceitos matemáticos nas diferentes formas de representação, pois a pirâmide pode ser reconhecida pela sua visualização e por suas propriedades geométricas, relacionando o seu significado (conceito)

com seu significante (a representação), o que faz pensar em diferentes formas de representação de pirâmides e troncos.

Conforme Duval (2008, p.15), “a compreensão em Matemática supõe a coordenação de, ao menos, dois registros de representação semiótica”. Isso leva a pensar que, se o aluno conseguir reconhecer o mesmo objeto em diferentes registros, chegará à compreensão em Matemática.

Assim, a pesquisa teve como fundamentação teórica a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e, como objetivo geral, analisar a mobilização dos Registros de Representação Semiótica da pirâmide, a partir do seu tronco, com o uso do Geogebra 3D.

Diante disso, apresenta-se, neste artigo, um recorte da pesquisa e alguns resultados da mesma, a qual tentou motivar o aluno para o estudo das pirâmides e evidenciar pontos de bloqueio, além de contribuir na construção e reconstrução de conceitos de geometria plana e espacial os quais auxiliem na aprendizagem matemática. Nesse sentido, buscou-se relacionar conteúdo com realidade ao usar tecnologia para desenvolver visualização e construção do pensamento geométrico.

#### TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

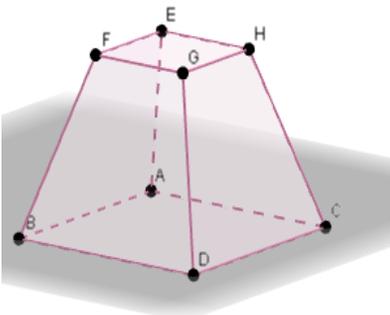
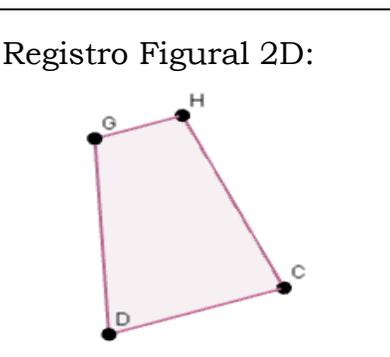
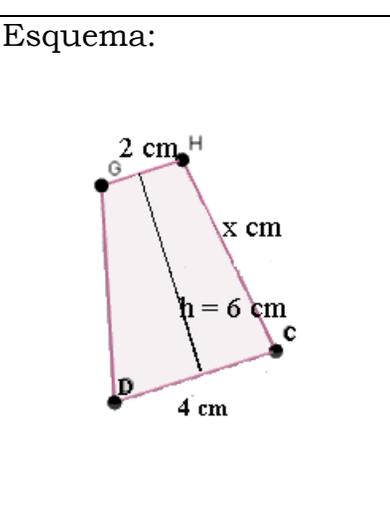
Duval (2011) desenvolveu uma teoria que levou em consideração os registros de representação semiótica, para compreender o funcionamento cognitivo do pensamento. Segundo ele, pode-se entender que os registros são utilizados para representar, visualizar e identificar, produzindo significado e compreensão. Cita como exemplos o registro numérico, o geométrico, o figural e o algébrico. Alguns objetos matemáticos não são perceptíveis, só se tem acesso a eles por meio de representações como, por exemplo, a escrita decimal, a forma fracionária, os símbolos e os gráficos.

De acordo com essa teoria, para compreender um conceito, é necessário que o aluno consiga passar de um registro de representação semiótica a outro. Duval (2005, apud Salgueiro; Savioli, 2014) afirma que, na passagem de um registro de representação semiótica a outro, há uma articulação entre os aspectos cognitivos específicos de cada um dos registros envolvidos. Essa passagem não é apenas modificar o modo de tratamento do objeto matemático, mas explicar propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto.

Assim, por exemplo, no objeto tronco de pirâmide, as representações figurais, planificação e em perspectiva 3D, que são distintas, não são o mesmo que o objeto representado, pois a planificação apresenta as faces e a superfície do tronco, enquanto a perspectiva 3D pode apresentar o sólido (ou seu volume).

Duval (2008) classifica os diferentes registros de representação semiótica utilizados na Matemática: discursivos, não discursivos, multifuncionais e monofuncionais, dentre outros. No quadro 1, apresenta-se uma adaptação dos diferentes registros de representação utilizados no estudo do tronco da pirâmide quadrangular.

Quadro 1. Registros de representação semiótica do tronco de pirâmide quadrangular

	Representações Discursivas	Representações Não Discursivas
Registros Multifuncionais: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Registro <sup>4</sup> em Língua Natural (designação, enunciação e raciocínio):  Exemplo: construa um tronco de pirâmide, seguindo as instruções: construa um polígono quadrangular ABDC no plano, trace as diagonais e, na interseção das diagonais, trace uma reta perpendicular. Num plano paralelo e não coincidente à base, construa um polígono quadrangular EFGH, de modo que a interseção das diagonais desse polígono pertença à reta perpendicular. Determine AEFBA, DGFB, CHGD, AEHC, regiões poligonais que, juntamente com a região poligonal ABCD e a EFGH, formam o poliedro chamado Tronco de Pirâmide Quadrangular.	Registro Figural 3D: 
		Registro Figural 2D: 
Registros Monofuncionais: os tratamentos são principalmente algoritmizáveis.	Registro Algébrico:  Exemplo: fórmula para calcular a área de uma face lateral.  $A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \times h}{2}$	Esquema:  
	Registro Numérico (natural, inteiro, racional, irracional):  $A_{\text{trapézio}} = \frac{(4 + 2) \times 6}{2} =$ $= \frac{(6) \times 6}{2} = \frac{36}{2} = 18$	

Duval (2009) menciona a importância de não confundir o objeto com sua representação para compreender a Matemática: “toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão”. (p.14)

<sup>4</sup> Na expressão registro, a pesquisadora está fazendo referência a um registro de representação.

De maneira empírica, o objeto matemático pode ser entendido como uma ideia, um conceito ou uma propriedade. Necessita de um sistema de registro, símbolo e sinais para representá-lo e ter acesso a ele. Os registros de representação são maneiras de representar objetos matemáticos e facilitar o processo de aprendizagem, pois tornam mais acessível a compreensão da Matemática.

O autor ressalta que os registros “[...] permitem, igualmente, analisar suas produções e colocar em evidência seus pontos de bloqueio” (Idem, p.14). Assim, os vários registros a que se pode recorrer para resolver um problema, segundo ele, “permitem identificar todas as variáveis cognitivas que jogam sobre a compreensão ou incompreensão da Matemática e sobre as capacidades de transferir os conhecimentos matemáticos para outras situações diferentes daquelas que foram introduzidas” (Ibidem, p.105).

Segundo Duval (2008), existem dois tipos de transformações de representação semióticas: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos ocorrem dentro do mesmo registro como, por exemplo, resolver uma expressão numérica envolvendo frações, utilizando apenas a forma fracionária; a conversão muda de um registro para outro conservando o mesmo objeto como, por exemplo, o objeto função, passar do registro da escrita algébrica da lei para o registro da forma gráfica.

Diante dessa teoria, não se pode deixar de falar e refletir sobre a sua importância para a formação de professores, com vistas a uma reflexão sobre sua prática, pois seria insuficiente mostrar apenas os diferentes tipos de registros possíveis para um determinado conteúdo. Acredita-se que o professor, conhecendo-a, possa elaborar questões que contribuam para a aprendizagem matemática significativamente, além de analisar as produções de representações semióticas dos alunos de maneira mais eficaz, pois, muitas vezes, eles, e até mesmo o professor, corrigem o exercício olhando apenas a resposta final, sem dar atenção devida ao processo para chegar à resposta.

Duval (2011) menciona que, nos últimos quinze anos, ocorreu uma importante mudança no ensino de Geometria com relação aos objetivos desse ensino e à maneira de introduzir os objetos estudados, uma vez que as tecnologias estão cada vez mais avançadas e mudando a maneira de ser e viver das pessoas e, na educação, tem sido usada como suporte pedagógico para ajudar na aprendizagem e motivar os alunos.

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias:

não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como

ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática (Brasil, 2006. p.87).

Assim, o uso de softwares de Geometria Dinâmica tem despertado o interesse, pelo seu potencial educacional como limitador de aprendizagem (consequência da própria tecnologia). Por exemplo, um plano é um objeto geométrico infinito, mas se for observado só no visual, na janela de visualização 3D do Geogebra, a impressão que fica de que é limitado, o que requer conhecimento do software utilizado e um bom planejamento da aula.

A opção pelo uso do software Geogebra, na presente pesquisa, deveu-se ao fato de ser gratuito, apresentar uma versão 3D, rodar em qualquer plataforma e apresentar características importantes como, por exemplo, janela de álgebra, recursos de animação, simulação e protocolo de construção, além da visualização 2D e 3D.

#### METODOLOGIA E ATIVIDADES

A pesquisa foi realizada, em uma escola da rede pública Estadual de uma cidade do Rio Grande do Sul, com alunos de três turmas do terceiro ano do Ensino Médio Politécnico, nas que a investigadora é a professora regente. Os alunos foram divididos em grupos de, no máximo, 3 integrantes, sendo escolhidos aleatoriamente 4 grupos para a análise dos registros, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, constantes do artigo, em virtude do elevado número total de participantes.

Ela foi desenvolvida na perspectiva qualitativa, pois os registros dos alunos e as observações visaram compreender o raciocínio e as mobilizações efetuadas por eles. Possui caráter exploratório, porque as informações coletadas visaram esclarecer, buscar a essência do fenômeno pesquisado.

Segundo Stake (2011, p.68), na pesquisa qualitativa:

o pesquisador seleciona as atividades e os contextos que oferecem possibilidade de compreender uma parte interessante sobre como as coisas funcionam. A amplitude e a totalidade da experiência estudada não são tão importantes quanto selecionar experiências que possam ser consideradas revelações perspicazes, uma boa contribuição para a compreensão pessoal.

Como afirmam Borba e Araújo (2013, p.25), “[...] as pesquisas realizadas segundo uma abordagem qualitativa fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações”. Ou seja, por meio dos registros dos alunos, buscam-se informações que primam pelo significado dado aos registros para compreender e investigar como aprendem, suas dificuldades, os pontos de bloqueio, o que eles sabem e que tipo de conhecimento eles têm. Isso pode contribuir na análise dos registros, segundo a teoria dos Registros de Representação Semiótica.

As atividades foram realizadas durante a aula de Matemática e divididas em três etapas.

Na Etapa I, tem-se a mobilização de: registro em língua natural, registro figural 2D e 3D e registro algébrico/numérico. Nessa etapa, os objetivos eram: fazer com que o aluno percebesse a diferença entre duas caixas (uma de um tronco de pirâmide e outra um prisma); investigar as concepções sobre troncos de pirâmides; verificar os conhecimentos prévios do aluno; reconhecer as figuras geométricas planas que compõem a caixa; identificar o objeto e associá-lo com a Matemática. Ou seja, averiguar se o aluno consegue associar o objeto à representação de um tronco de pirâmide e perceber a necessidade do estudo de um novo conteúdo, visto que uma das caixas não é um prisma e não é possível calcular o seu volume de forma imediata com fórmula simples e usual, a exemplo do que se faz com outros sólidos, o que pode servir de motivação para aprender um novo conteúdo: pirâmides. Conforme comenta Diogo (2007, p.18), “problemas geradores cumpririam a finalidade de apresentar uma nova unidade didática, gerando necessidade de novos conhecimentos para o aprendiz”.

Na Etapa II, houve a mobilização dos seguintes registros: figural 2D e 3D e em língua natural. Começou sendo retomado, de forma dialogada, o que os alunos fizeram na aula anterior, com vista à sistematização dos registros. Os grupos tiveram de construir a planificação do tronco da pirâmide, em uma folha A3 colorida, observando as dimensões do objeto a partir da apresentação de uma caixa de sabonete (Figura 1) que foi entregue, na primeira etapa, novamente, a cada grupo.



Figura 1 - Embalagem de sabonete

Fonte: arquivo pessoal.

Depois de planificada e fotografada, tentando remontá-la e observar o que acontecia, deveriam escrever, logo após, um pequeno relato dessa atividade. A segunda etapa teve como propósito: auxiliar na construção de conceitos matemáticos e de pensamento geométrico; deduzir as principais propriedades de um tronco de pirâmide; observar as formas geométricas ao planificar e usar os conhecimentos de geometria plana para a posterior construção com material

concreto. Dessa forma, a intenção era fazer o aluno perceber a importância das medidas corretas, associar o conhecimento de um objeto matemático à prática cotidiana como, por exemplo, se uma empresa contratar o grupo para desenvolver e fabricar caixas de papel, um erro na medida pode significar um grande prejuízo. O objetivo principal, nessa etapa, consistiu em analisar os registros, a forma como o aluno raciocina e elabora a estrutura lógica para a realização da atividade.

Na Etapa III, os alunos foram para o laboratório de informática da escola, onde cada grupo fez uso de um netbook ou um computador. As orientações de sua utilização e do software Geogebra 3D foram passadas de forma dialogada e sucinta, uma vez que os alunos já tinham utilizado o laboratório e o software Geogebra 3D em outra ocasião com a mesma professora pesquisadora.

Para a aplicação dessa terceira etapa, primeiro foram lembradas as atividades anteriores, sendo entregues as anotações e a caixa construída na etapa anterior com vista à sistematização dos registros. Depois, cada uma das duplas recebeu as instruções da terceira atividade, na qual teriam de representar, no Geogebra 3D, a caixa que eles remontaram na aula anterior (um tronco de pirâmide). A partir do tronco deveriam: construir a pirâmide, descrevendo os passos realizados no software para chegar à construção final; determinar os elementos de uma pirâmide; calcular sua altura; calcular as áreas laterais; calcular a área total e o seu volume.

Nessa etapa, também se buscou a apropriação e outros conceitos e formas geométricas, além dos adquiridos nas etapas anteriores. Também buscou-se estimular a visualização, deduzir e introduzir os conceitos básicos dos seguintes elementos de pirâmides: arestas, vértices, faces, altura da pirâmide, área da base, área lateral, área total, além de instigar a curiosidade para o estudo de pirâmides e o seu volume. O objetivo principal da etapa foi analisar os registros, as estratégias usadas, a forma como o aluno raciocina, elaborar a estrutura lógica para a realização dessa atividade na dimensão 3D, chegando ao conceito prévio de pirâmide, começando pelo tronco, que advém da secção da pirâmide, como problema gerador e, assim, abordar um estudo sobre as pirâmides, conteúdo constante do programa da série na escola.

Dessa forma, foi possível analisar e comparar os registros das três etapas, incluindo o conhecimento prévio, o raciocínio da construção no papel e no Geogebra 3D, a fim de analisar como ocorreram as conversões, verificar se ocorreram ou não contribuições do Geogebra 3D e analisar *a mobilização dos Registros de Representação Semiótica da pirâmide a partir do seu tronco com o uso de recurso didático e o Geogebra 3D*.

Assim, as atividades contemplaram os seguintes registros de representações semióticas: figural (representação 1D e 2D na planificação), linguagem natural, o registro algébrico/numérico e, posteriormente, com a ajuda do software Geogebra 3D, o registro figural 3D. Esperava-se que o aluno pudesse identificar, definir e revisar elementos e conceitos básicos de geometria plana

envolvidos na atividade, passando a entender a estrutura de formação desse objeto geométrico.

Nasser e Tinoco (2004) afirmam que a realização de atividades e a reflexão sobre elas fazem com que o aluno construa conceitos básicos matemáticos, sendo essa uma forma concreta do professor compreender como o aluno aprende.

Buscou-se, assim, fazer com que o aluno investigasse e propusesse soluções para a resolução do problema de determinar alguns dos elementos de uma pirâmide, partindo de seu tronco, recorrendo às ferramentas do software Geogebra 3D.

## RESULTADOS

Apresentam-se, aqui, resultados parciais das atividades, além de alguns registros analisados e mobilizados para compreensão desses resultados.

### Etapa I

A primeira Etapa, apresentada a seguir, contou com 6 questões, assim apresentadas aos alunos que levaram três horas-aula para realizá-la:

Você está recebendo duas caixas, uma azul e outra vermelha. Observe-as e responda:

As duas caixas representam prismas? Por quê?

Represente essas caixas de todas as maneiras possíveis no papel.

Descreva os objetos geométricos que compõem as duas e suas características.

Identifique as figuras planas que compõem as caixas.

Calcule as áreas das bases, laterais e total de cada uma das caixas.

Você saberia como calcular o volume dessas caixas? Seria possível?

A tarefa consistiu em distribuir duas caixas para serem observadas, sendo uma azul, em formato de prisma, e outra vermelha, em forma de tronco de pirâmide quadrangular. Elas representavam objetos reais do cotidiano e, logo em seguida, registraram se as duas caixas representam prismas e argumentaram o porquê. Depois, representaram as caixas, em folha A3 branca, de várias maneiras possíveis, bem como identificaram as figuras geométricas planas que as compunham. Efetuaram os cálculos das superfícies laterais e responderam à seguinte pergunta: você saberia como calcular o volume dessas caixas?

Nessa primeira etapa, houve a mobilização dos seguintes registros: em língua natural, figural 2D e 3D e algébrico/numérico. Observou-se que houve a mobilização do registro em língua natural, em que os registros multifuncionais (não algoritmizáveis) apareceram na representação discursiva em língua natural, com a qual os alunos tentaram fazer associações verbais (conceituais), raciocinando, argumentando, a partir das observações e conhecimento prévio. Ao manusear as duas caixas, o grupo conseguiu identificar a caixa azul como

sendo um prisma e a vermelha como não sendo, baseando-se na definição de prisma. Conforme preconiza Duval (2014, p.25), “manipular os objetos materiais permite uma transferência das observações, formando uma base intuitiva para começar a usar um vocábulo geométrico, formulando uma justificativa”, o que pode ser percebido na Figura 2, com o uso do termo congruente.

1- Não, pois um prisma possui as bases congruentes (iguais)

Figura 2 – Descrição do grupo B

Fonte: dados da pesquisa.

Na questão 2, os alunos deveriam representar, de todas as maneiras possíveis, as duas caixas. Apresentaram os registros figurais 2D e 3D, na representação não discursiva, sendo que o grupo C não conseguiu mobilizar o registro figural, pois, ao desenhar a planificação da caixa vermelha, não colocou as bases superior e inferior (Figura 3).

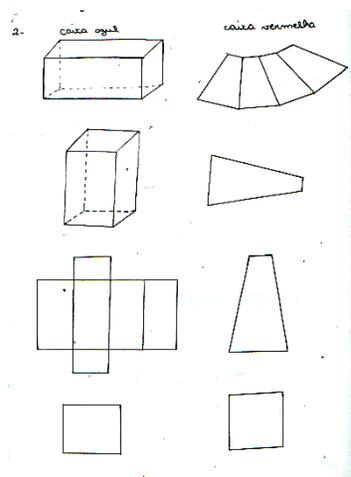


Figura 3 – Representações da caixa do grupo C

Fonte: dados da pesquisa.

Observaram-se as diferentes maneiras de representar o mesmo objeto e muitos conceitos e propriedades matemáticas nem sempre ficaram visíveis nos registros, mostrando a necessidade do professor saber qual o conhecimento prévio do aluno para que ele consiga progredir nos estudos. É importante o professor transitar entre os diferentes registros, ao falar sobre um objeto matemático e associá-lo à sua representação, para que todos os alunos tenham a mesma imagem mental e identifiquem as mesmas propriedades.

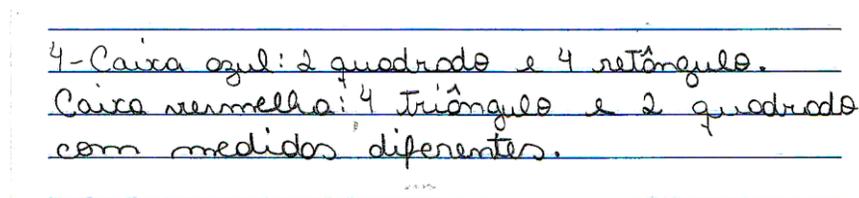
Observou-se, nas questões 1 e 2, a mobilização na conversão do registro em língua natural para o registro figural, em que o aluno, após descrever suas constatações pelas observações e manipulação do objeto, buscou a representação mental para expressá-la no registro figural. Isso foi importante, pois “a tomada de consciência da maneira pela qual os termos geométricos se

articulam com as figuras é condição cognitiva para que os alunos possam compreender enunciados matemáticos” (Duval, 2014, p.32).

Na questão 3, ao descrever os objetos geométricos que compõem as caixas, tem-se, novamente, a mobilização do registro em língua natural. Um dos grupos não conseguiu fazer a conversão do registro figural da questão 2 para o registro em língua natural da questão 3. Todos tentaram associar o registro figural a conceitos geométricos, a propriedades conhecidas, o objeto à sua representação, corroborando o indicado por Duval (2014, p.26): “desafio é fazer com que os alunos expressem, com suas palavras, as observações matematicamente úteis resultantes das manipulações materiais”.

Da questão 3 para a questão 4, tem-se os tratamentos em registro em língua natural. Para Duval (2014), a linguagem não tem apenas a função social de comunicação, mas a função cognitiva de tomada de consciência daquilo que se faz ou pensa, conceitualização para coordenar o objeto real com a reprodução por meio de uma palavra e, ainda, o tratamento que requer uma produção escrita, uma definição.

Assim, nessa questão, os grupos deveriam descrever as figuras planas que compõem as caixas. Somente o grupo identificado por C não conseguiu fazer o tratamento, comparando os registros anteriores. Por exemplo, ao descrever (Figura 4) a caixa vermelha como 4 triângulos e 2 quadrados, contraria o registro figural da questão 2, Figura 3, na qual desenhou trapézios (vista lateral), mas, no momento de descrever a figura plana, não conseguiu identificá-los nas faces laterais, demonstrando pouco domínio nessa forma de representação e falta de coordenação dos registros de representação.



4-Caixa azul: 2 quadrado e 4 retângulo.  
Caixa vermelha: 4 triângulo e 2 quadrado  
com medidas diferentes.

Figura 4 – Descrição dos objetos – Grupo C.

Fonte: dados da pesquisa

Houve dificuldade em descrever e explicar o que fora solicitado na questão, mesmo com o objeto concreto em mãos, mostrando que o grupo não conseguiu fazer os tratamentos e não compreendeu, ainda, as propriedades dos objetos disponíveis pela observação, o que pode significar pouco conhecimento sobre geometria plana e espacial.

Segundo Duval (2008), o não reconhecimento do mesmo objeto matemático, em representações bem diferentes,

limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos, fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem. (p.21)

Nesse sentido, o que garante a apreensão do objeto matemático é a coordenação dos diferentes registros de representação.

Neste artigo, por limitação de espaço, não se fará a análise das duas últimas questões desta etapa. No que segue, inicia-se Etapa II, a qual teve o enunciado a seguir.

Observando as dimensões da caixa vermelha:

1. Construa a sua planificação com o auxílio da régua, tesoura, fita durex, cola, borracha, lápis e papel. Fotografe a planificação e envie para o e-mail fornecido pela professora.
2. Depois de planejado, tente montar para ver o que acontece.
3. Escreva um pequeno relato dessa atividade.

Na etapa II, teve-se a mobilização dos seguintes registros: figural 2D e 3D e em língua natural.

Esperava-se que o aluno, observando as dimensões da caixa, construísse a planificação em folha A3 colorida, depois remontasse a caixa e, por fim, escrevesse um relato da atividade. Assim, precisasse elaborar uma estratégia de resolução e planejamento da atividade, empregando um material manipulável na representação de uma situação real, utilizando e construindo conceitos matemáticos.

Nas duas primeiras questões teve-se a mobilização do registro figural 2D, em que os registros multifuncionais, cujos tratamentos não são algoritmizáveis, aparecem na representação não discursiva. Os alunos tentaram fazer associações dos conceitos e propriedades geométricas de forma mental, a partir das observações e conhecimentos prévios, buscando uma melhor representação para a planificação e montagem da caixa.

Percebeu-se que somente os grupos A e D seguiram o raciocínio utilizado, na etapa I, no registro figural da planificação para a construção da caixa nessa etapa II. O grupo A desenhou, em forma de cruz, e o grupo D desenhou as partes separadamente, como uma desconstrução bidimensional (3D- 2D) da caixa, isto é, da caixa em 3D para faces laterais em forma de trapézios e bases em forma de quadrados de medidas diferentes, os quais são figuras em 2D. Todos os grupos conseguiram fazer a atividade (Figura 5) na qual as formas geométricas de quadrados e trapézios foram observadas, bem como os respectivos conceitos. Propriedades das figuras foram usadas na planificação e na construção da caixa como, por exemplo, a região poligonal do quadrado, na qual os grupos, mesmo faltando instrumentos adequados como compasso e transferidor, conseguiram desenhar de modo que os lados do quadrado tivessem os mesmos tamanhos e lados opostos fossem paralelos.

Notou-se que a apreensão perceptiva foi a mesma nos grupos; já as apreensões operatórias e sequencial dos grupos A, B e C foram diferentes do grupo D.

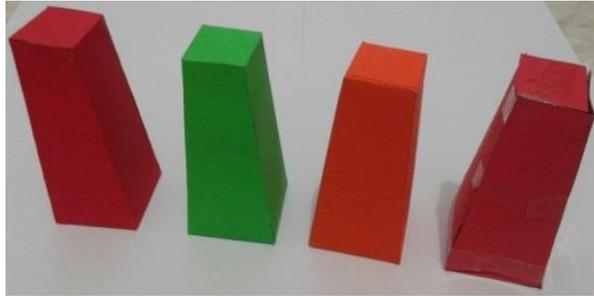


Figura 5 – Caixas confeccionadas pelos grupos A, B, C e D.

Fonte: dados da pesquisa.

A respeito do uso de material concreto ou manipulável no ensino de Matemática, Schons e Bisognin (2015, p.150) comentam que:

[,,] ao manusear ou construir o material de estudo, os alunos conseguem observar características e fazer conjecturas que não seriam possíveis se o material apenas lhes fosse apresentado. O material manipulável serve como mediador da aprendizagem dos estudantes, de qualquer idade e nível de ensino, pois o manuseio desses materiais também possibilita aos educandos desenvolverem construções geométricas mentais.

Nessa atividade, ficou evidente, para a pesquisadora, a importância da manipulação do material concreto, pois os alunos conseguiram observar características e construir conceitos que dão sustentáculo para a Etapa III, principalmente o grupo C, que soube fazer a Etapa II, mas não conseguiu transpor para o papel os conceitos durante a Etapa I. Também foi importante a precisão do desenho correto e colocar as medidas certas. Para que a montagem ficasse boa, dependia da espessura do papel utilizado, mas foi uma experiência bem interessante, conforme o relato dos grupos no registro em língua natural.

No que segue se analisam as questões envolvidas na Etapa III, a qual foi realizada no laboratório de informática. São elas:

Realize as seguintes atividades:

Represente, por meio do Geogebra 3D, a caixa que você construiu na aula anterior, utilizando as seguintes medidas: para o polígono da base maior, lado de quatro centímetros; para o polígono da base menor, lado de dois centímetros e altura de quatro centímetros.

Descreva os passos realizados no software para chegar à construção final.

A partir da sua construção no item anterior, é possível determinar um ponto único fora do objeto, através da ampliação das arestas e faces laterais e obter um novo objeto? Se for possível, descrever os passos dessa construção e disser o que lembra o objeto construído.

Encaminhe sua construção para a professora, especificando numa caixa de texto do Geogebra: faces, vértices, arestas, altura, as áreas da base, áreas laterais, área total e volume.

Nessa etapa III, teve-se a mobilização dos seguintes registros: língua natural, figural 2D e 3D e o algébrico/numérico.

Tem-se, nessa etapa: uma apreensão perceptiva imediata e interpretação das formas que compõem o objeto; uma apreensão operatória nas modificações figurais executadas e reconfiguração do objeto, por meio da sua reconstrução no software e reconhecimento das unidades figurais, conforme preconiza Duval.

A apreensão sequencial apareceu na reprodução da caixa 3D para a figura 3D no software que seguiu uma sequência de passos para chegar à construção final.

A apreensão discursiva ficou limitada ao raciocínio dedutivo na interpretação da definição do objeto, pois a descrição dos passos para chegar à construção final ficou reduzida ao protocolo de construção e à síntese descrita pelo grupo.

É possível perceber as fases de um tratamento figural do grupo A, na Figura 6, durante a atividade 3 da Etapa III, dentre muitos outros possíveis, para a solução da atividade proposta. “A figura é identificada pelas propriedades que não vemos porque nenhum desenho as mostra em sua generalidade. Essas só podem ser aprendidas por conceitos” (Duval, 2011, p.91).

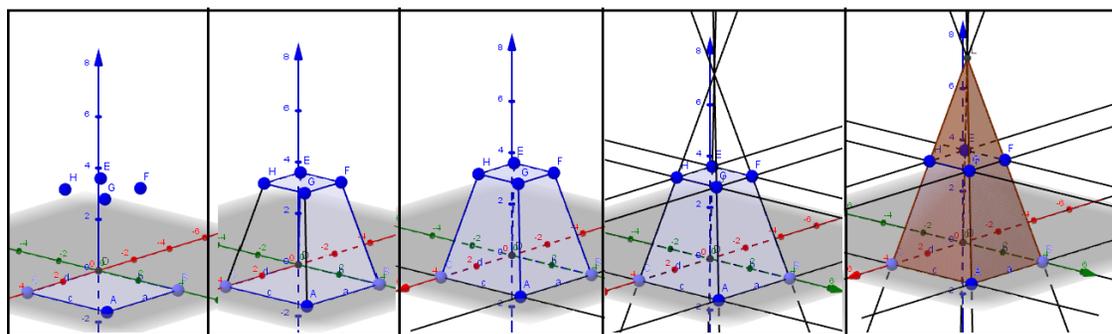


Figura 6 – Construção da atividade 3 – Grupo A.

Fonte: dados da pesquisa.

Cada grupo usou uma estratégia diferente para a solução. Por exemplo, o grupo A utilizou as coordenadas dos pontos para a construção da caixa, seguiu a sequência ponto, polígono para as bases, segmento para as arestas laterais e polígono para as faces. Pelo protocolo de construção, notou-se que o grupo começou a ampliar as arestas pelo plano, depois, por uma aresta lateral, e seguiu traçando retas pelos vértices colineares pertencentes ao mesmo lado do quadrado e, só depois, tentou, novamente, prolongar pelas arestas laterais, quando os alunos verificaram que as retas se encontravam num único ponto. Depois, determinou, com um ponto, o encontro das retas e utilizou a ferramenta pirâmide para dar forma à estrutura da figura formada. Calculou a

área de uma face triangular e encontrou o volume da pirâmide construída, utilizando a ferramenta disponível no software, conforme relato da Figura 7.

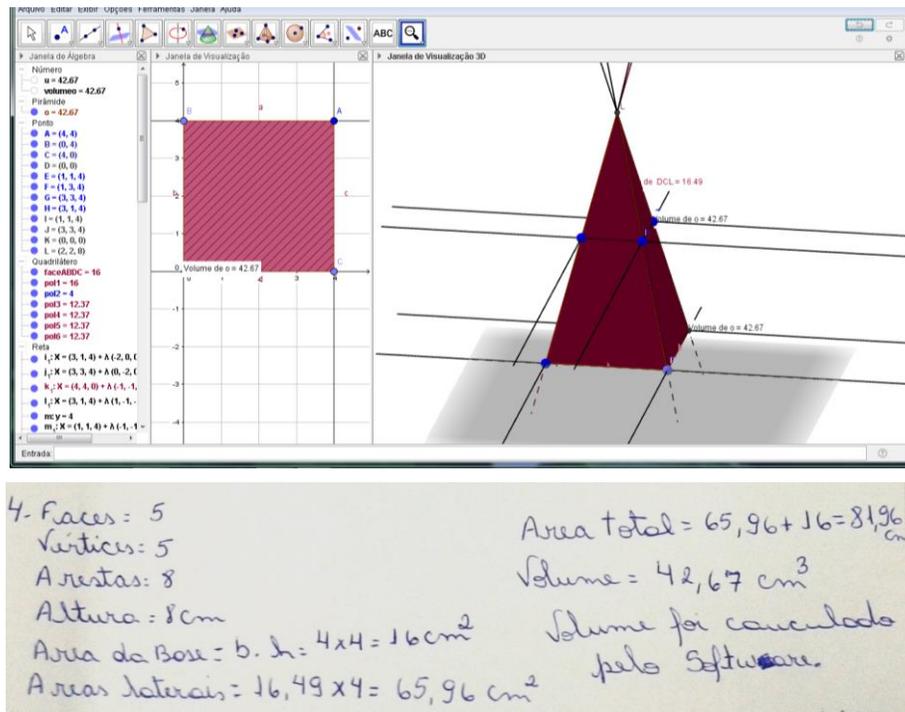


Figura 7 – resposta da atividade 4 etapa III – Grupo A.

Fonte: dados da pesquisa.

Foram identificados tratamentos dentro do registro figural para construção da pirâmide a partir de seu tronco e conversões do registro figural para o registro algébrico/numérico e o registro em língua natural. Esse grupo, ao analisar os dados na tela, buscou uma relação entre os diferentes registros, nos conceitos e nas formas geométricas, estabelecendo os elementos da pirâmide ao responder a questão corretamente, conseguindo, assim, transitar entre os diferentes registros.

Nas observações das atividades em laboratório, a curiosidade de saber como o software calculava era grande. Percebeu-se, também, a aquisição de conhecimentos matemáticos por parte dos grupos, pois surgiram muitas dúvidas em relação à geometria como, por exemplo, o fato do segmento ser limitado pelos pontos enquanto a reta não era. Questionavam o porquê de a face não ficar pintada, referindo-se à diferença de polígono e região poligonal. Queria saber se a área da face que foi calculada como um retângulo era um trapézio. Esses e outros conceitos foram importantes para a compreensão e aprendizagem posteriores, os quais o software ajudou a resgatar pois, conforme paravam o cursor num ícone da barra de ferramenta, esse mostrava escrito o comando que executaria, fazendo o aluno, de certa forma, pensar ou repensar aquilo que sabia com os conceitos e propriedades que iam se formando ao construir o objeto.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A estratégia buscada, por meio do problema gerador, em que foi investigada a mobilização dos Registros de Representação Semiótica dos alunos para desencadear o estudo do novo conteúdo, evidenciou, na pesquisa, algumas dificuldades frequentes que podem aparecer no estudo das pirâmides como, por exemplo, o cálculo das superfícies laterais de cada face, como visto na Figura 4, quando o grupo não conseguiu identificar o trapézio na face lateral. Assim, depois da realização da pesquisa, foram discutidas as dúvidas com os participantes e solucionadas, para prosseguir com o conteúdo de pirâmide.

Foram apresentadas, neste artigo, algumas das atividades realizadas, a partir das quais se pode concluir que a utilização do material concreto e o software Geogebra 3D contribuíram na construção da pirâmide a partir de seu tronco, com base nos registros de representação semiótica, pois proporcionou o desenvolvimento do raciocínio espacial do aluno numa situação desafiadora. Nela, o aluno vivenciou, pela experiência com material concreto e com o uso das tecnologias, conceitos de geometria em diferentes formas de representação, fixando, recordando e descobrindo conceitos elementares, tanto de geometria plana, quanto de espacial, de forma mais atrativa, estimulando a visualização e a aprendizagem.

Julga-se pertinente o estudo do objeto matemático pirâmide aliado à teoria de Duval, por se tratar de um conteúdo de geometria espacial importante para a formação do raciocínio e visualização do aluno, uma vez que foram as conversões entre os diversos registros que favoreceram a obtenção desse objeto a partir do problema gerador.

## BIBLIOGRAFIA

Borba, M. de C.; Araújo, J. de L. (2013). Pesquisa qualitativa em Educação Matemática: notas introdutórias. In: Borba, M. de C.; Araújo, J. de La (Org.). PESQUISA QUALITATIVA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Brasil (2006). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Volume 2. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília.

Cardoso, F. C. (2012). O Ensino da Geometria e os Registros de Representação sob um enfoque epistemológico. In: SEMINÁRIO DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL, 2012. Unijuí - RS. ANAIS. Ijuí: UNIJUÍ.

Diogo, M. A. (2007). Problemas Geradores no Ensino-Aprendizagem de Matemática no Ensino Médio. Dissertação de Mestrado. Porto Alegre/RS. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Duval, R. (2008). Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: Machado, S. D. A. (Org.). APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA. 4 ed. Campinas – SP: Papyrus.

Duval, R. (2009). Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física.

Duval, R. (2011). Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. São Paulo: PROEM.

Duval, R. (2014). Rupturas e omissões entre manipular, ver, dizer e escrever: história de uma sequência de atividades em geometria. In: Brandt, C. F.; Moretti, M. T. (org.). AS CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS PARA O ENSINO E PESQUISA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Ijuí: Ed. UNIJUÍ, 256 p.

Nasser, L.; Tinoco, L. (2004). Curso básico de geometria: enfoque didático/Redação e coordenação Lilian Nasser e Lucia Tinoco. 3. ed. Rio de Janeiro: UFRJ/ IM. Projeto Fundão.

Salgueiro, N. C. G.; Savioli, Â. M; P. das D. (2014).Registros de Representação Semiótica de Funções: Análise de Produções escritas de estudantes de Ensino Médio. VIDYA, Santa Maria. v. 34, n. 2, p. 47-60, jul./dez.

Schons, E. F.; Bisognin, E. (2015). Construindo conceitos de geometria no ensino médio por meio da confecção de embalagens: uma contribuição da metodologia de projetos. VIDYA, Santa Maria. v. 35, n. 2, p. 147-158, jul./dez.

Stake, R. E. (2011). Pesquisa qualitativa: estudando como as coisas funcionam. Porto Alegre: Penso.

