LOS ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. SU IMPORTANCIA DIDÁCTICA

LOS ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. SU IMPORTANCIA DIDÁCTICA

AUTORES: Michel Enrique Gamboa Graus[1]

Juan José Fonseca Pérez[2]

DIRECCIÓN PARA CORRESPONDENCIA: michelgamboagraus@gmail.com

Fecha de recepción: 16 - 12 - 2016 Fecha de aceptación: 21 - 03 - 2017

RESUMEN

En el trabajo se parte de una reflexión teórica del tratamiento a los errores en la enseñanza y en particular de las matemáticas y la adecuada concepción que sobre estos deben de tener los docentes para aprovechar sus potencialidades en el proceso de enseñanza aprendizaje. Se expone una clasificación, además de algunos consejos útiles de cómo darles tratamiento en clase.

PALABRAS CLAVE: Matemática; errores; aprendizaje.

MISTAKES IN LEARNING MATHEMATICS. ITS TEACHING IMPORTANCE

ABSTRACT

The article deals with a theoretical reflection on the treatment of mistakes in teaching, particularly in mathematics, and on the appropriate conception that teachers should have of these mistakes in order to take advantage of their potential in the teaching-learning process. A classification is presented, as well as some useful advice on how to make use of them in class.

KEYWORDS: Math; mistakes; learning.

INTRODUCCIÓN

Renato Descartes, quien ha sido uno de los pensadores más estudiado de la humanidad y de los que más se ha escrito, señaló que los conocimientos asequibles al espíritu humano están unidos entre sí por un lazo tan maravilloso y se deducen unos de otros por consecuencias tan necesarias, que

[1] Licenciado en Educación. Especialidad Matemática-Computación. Doctor en Ciencias Pedagógicas. Profesor Titular de Probabilidades y Estadísticas. Coordinador de Investigaciones del Centro de Estudios Pedagógicos de la Universidad de Las Tunas. Cuba. E-mail: michelgamboagraus@gmail.com

[2] Licenciado en Educación. Especialidad Matemática. Doctor en Ciencias Pedagógicas y Profesor Titular. Máster en Ciencias de la Educación Superior. Asesor de Ciencia y Técnica de la Universidad de Las Tunas. Cuba. E-mail: juanjosefp90@gmail.com

no hace falta gran sagacidad ni artificio para encontrarlos, con tal que comencemos por los más simples y nos elevemos gradualmente a los más sublimes; pero también advirtió que el conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta alguna sombra; jamás es inmediata y plena, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que en el espíritu mismo obstaculiza, que está mezclado con nuestros errores y nuestros prejuicios. Puntualizó además que el error es parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento; la presencia de este es la necesidad de un ejercicio constante de la crítica, sometiendo a prueba nuestros conocimientos y aproximaciones a la verdad; los errores son elementos usuales en nuestro camino hacia el conocimiento verdadero donde pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje.

Desde hace algún tiempo se ha consolidado un campo de investigación sobre educación matemática, entre cuyos estudios se encuentra el análisis de los errores de los estudiantes y las dificultades individuales del aprendizaje escolar. De este modo se lograron nuevos conocimientos relativos a habilidades matemáticas específicas y sobre aspecto del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Las dificultades de aprendizaje que presentan los alumnos son históricas y de una gran diversidad, El error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos. La verdad es siempre reconocible como verdad. El conocimiento no necesita ser explicado, pero ¿cómo podemos caer en el error si la verdad es más clara que el sol?

Sócrates adelantó una solución con la doctrina de la falibilidad: todos nosotros podemos errar, y con frecuencia erramos individual y colectivamente; pero la idea del error y la falibilidad implica que podemos buscar la verdad, la verdad objetiva, aun cuando por lo general nos equivoquemos por amplio margen; si respetamos la verdad, debemos aspirar a ella examinando persistentemente nuestros errores: mediante la infatigable crítica racional y mediante la autocrítica.

Es importante señalar que el error no es un virus o una enfermedad que se puede evitar, el error forma parte del proceso del conocimiento de las personas, es algo a lo que nos tenemos que habituar para detectar, controlar, valorar y corregir; hay que enfrentar a los alumnos con los potenciales errores y a partir del conflicto cognitivo tratar de lograr la superación del mismo.

Al estudiar los errores, de acuerdo con las dificultades encontradas por los alumnos, se debiera reconocer que también son función de otras variables del proceso educativo: el profesor, el currículo, el entorno social en el que se enmarca la escuela, el medio cultural y sus relaciones, la familia, el grupo de alumnos, la propia institución, así como las posibles relaciones entre estas variables. Los errores en el aprendizaje de las matemáticas son el resultado de procesos muy complejos. Una delimitación clara de las causas posibles de un error dado o una explicación de cada error con la posibilidad de actuar sobre él es, con frecuencia, bastante difícil debido a que hay una fuerte interacción entre las variables del proceso educativo y, reiteradamente, es muy difícil aislar relaciones.

Es necesario tener mucho cuidado de no admitir como verdadero lo que nos ofrezca la más pequeña duda y por tanto debemos abstenernos de dar crédito a las cosas que no conocemos bien, librándonos así de ser engañados; también debemos hacer lo posible por despejar esa duda. Una opción es confrontar nuestros conocimientos, preguntar sobre lo que creemos haber aprendido, aunque parezcan preguntas absurdas, pues como adelantó Aristóteles si preguntamos algo que no sabemos o que no entendemos podemos parecer tontos durante el tiempo que dure la explicación, pero si no lo hacemos podemos parecerlo durante toda la vida.

La utilidad de esa duda inicial es muy grande, porque nos despoja de prejuicios y nos prepara un camino muy fácil para poder libertarnos de la influencia que sobre nosotros ejercen las primeras impresiones; las primeras opiniones recibidas en nuestra imaginación quedan en ellas impresas con tanta fuerza que nuestra voluntad a menos que se valga del auxilio de muy sólidas razones no es suficiente a borrarlas, nos cuesta mucho trabajo, sin embargo, librarnos de ellas enteramente; y es lo cierto, no obstante, que si no nos libramos y las consideramos como falsas o inciertas, siempre estaremos en peligro de caer en algún falso prejuicio. Tan cierto es esto que, por ejemplo, como desde nuestra infancia hemos imaginado que las estrellas eran muy pequeñas, no podemos aún deshacernos de esta imaginación, por más que sepamos, merced a las razones de la Astronomía, que son muy grandes. ¡Tanto puede en nosotros una opinión de antiguo recibida! De ese modo, una vez conocidas las cosas como verdaderas, es imposible que vuelva a surgir la duda.

Es muy cierto también que siempre que admitimos alguna razón de que no tenemos conocimiento exacto, o nos engañamos, o si encontramos la verdad, como es por casualidad, no podemos estar seguros de haberla encontrado ni saber con certeza que no nos engañamos; rara vez sucede que juzguemos de una cosa y advirtamos al mismo tiempo que no la conocemos con la distinción necesaria pues la razón nos dice naturalmente que nunca debemos juzgar de nada sin que lo conozcamos distintamente antes de juzgar, pero a veces nos equivocamos por presumir que en otro tiempo hemos conocido muchas cosas y en cuanto nos asalta este recuerdo le damos crédito como si las hubiéramos examinado lo suficiente aunque en realidad no hayamos tenido nunca un exacto conocimiento de ellas.

La ignorancia proviene de la ausencia de una facultad; pero ¿puede decirse lo mismo del error?: una piedra no yerra porque no tiene entendimiento; el error, pues ¿procede de una facultad positiva? ¿es mejor que podamos equivocarnos? Sería interesante reflexionar sobre estas interrogantes.

Para equivocarse es necesaria la facultad de juzgar; pero eso no significa que el error sea algo positivo, es únicamente la ausencia de una perfección. Muchas veces en el comienzo de la práctica se yerra y se vacila; así es débil e imperfecto todo lo que nace; y también es verdad que nada sin estas debilidades y torpezas llega a estado de perfección. Al mismo tiempo, si nos quitaran la posibilidad de equivocarnos nos quitan también el placer de acertar.

Está claro que los errores dependen de dos causas; de la facultad de conocer que tiene cada cual y de la facultad de elegir, o lo que es lo mismo del entendimiento y de la voluntad. El entendimiento por sí solo no asegura ni niega ninguna cosa; concibe las ideas de las cosas que puede afirmar o negar. Si se retiene la voluntad en los límites del conocimiento de cada uno de nosotros, de modo que no formemos juicios sino sobre cosas claras y distintamente representadas por el entendimiento, es imposible que nos equivoquemos; pero si elegimos hacer las cosas sin ningún esfuerzo, aplicando el azar, sin razonamiento alguno y sin compromisos con la verdad, no es maravilla que nos equivoquemos.

La voluntad, entonces, puede ir más allá que el entendimiento y en esto consiste precisamente el error. Cuando percibimos alguna cosa no corremos peligro de equivocarnos si no la juzgamos en manera alguna, y aunque juzguemos, tampoco podemos equivocarnos si solamente damos crédito a lo que clara y distintamente sabemos que debe hallarse comprendido en aquello que juzgamos; pero la causa de que nos engañemos es que juzgamos muchas veces sin tener un conocimiento exacto de lo que juzgamos. Muchos juicios precipitados nos impiden llegar al conocimiento de la verdad, y de tal manera nos previenen que no parece posible librarnos de ellos, si no nos resolvemos a dudar de las cosas que nos inspiran la menor sospecha de ser inciertas, la dificultad radica en saber cuáles son los casos en que una concepción clara nos extravía y cuáles son aquellos en que nos conduce rectamente a la verdad.

Los errores forman parte de las producciones de los alumnos durante su aprendizaje de las matemáticas. Son datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje los cuales constituyen un elemento estable de dichos procesos. Siendo un objetivo permanente de la enseñanza de las matemáticas en el sistema escolar lograr un correcto aprendizaje de las mismas por parte de todos los alumnos, es claro que las producciones o respuestas incorrectas a las cuestiones que se plantean se consideran como señales de serias deficiencias e incluso fracaso en el logro de dicho objetivo. Por ello el estudio de los errores en el aprendizaje de las matemáticas ha sido una cuestión de permanente interés en educación matemática, que tiene una larga historia y se ha caracterizado por aproximaciones e intereses muy diferentes. En cada época el análisis de errores en educación matemática se ha visto orientado por las corrientes predominantes en la Pedagogía y Psicología.

DESARROLLO

ALGUNOS ESTUDIOS

El español Luis Rico, uno de los investigadores más importantes a nivel mundial en el área de la educación matemática expresa que los errores se manifiestan como conocimientos inadecuados, por ello su detección se organiza mediante un escalonamiento de ejercicios, problemas y actividades; asimismo cuando se opera con ellos es necesario tener en cuenta que durante la realización de los ejercicios se precisa de un observador externo para evaluar la distancia entre la afirmación errónea y el conocimiento correcto, y conducir al alumno que comete el error hasta donde se ha estipulado como correcto. El tema central, para él, en relación con los errores y las dificultades es el análisis conceptual. ¿Cuántas piezas intervienen en cada concepto? Cuando hablamos de raíz cuadrada, ¿cuántas cosas hay en la noción de raíz cuadrada? Hay un signo, hay una equivalencia, es una simplificación de la notación de la función exponencial, pero también es una función, además es un algoritmo, son los valores que toma una función y al mismo tiempo es una representación, (representa un cuadrado cuya superficie conozco del que quiero conocer la longitud del lado). El hacer un análisis conceptual de todos los elementos que intervienen en cada una de las nociones fundamentales del currículo de matemáticas le parece que es el mejor modo de aproximarnos al estudio de los errores y las dificultades.

Se considera que el alemán Weiner (1922) es el fundador de la investigación didáctica orientada al estudio de los errores; trató de establecer patrones de errores que explicasen las equivocaciones individuales en todas las materias y para todos los grupos de edades escolares. Dentro del concepto general de “incorrecto” estableció la distinción entre equivocado, falsificación y error; también agrupó los errores en cinco categorías: familiares, persistentes, por similitud, mixtos y debidos a situaciones emocionales.

Otros alemanes mostraron su preocupación por el tema desde los propios inicios, entre los primeros que lo hicieron se encuentran Rose y Seseman.

Rose (1928) trató de establecer una clasificación de las causas del error en educación matemática: inatención, ignorancia de las reglas, confusión de conceptos e incapacidad para reconocer los rasgos característicos de un problema matemático.

Seseman (1931) se preocupó por proporcionar una fundamentación psicológica adecuada para una metodología en la enseñanza de las matemáticas: para él los errores eran como fenómenos que surgían de leyes que se habían formado mediante una incorrecta combinación de tendencias. Distinguió tres tipos de errores en Aritmética: mecánicos, asociativos y funcionales.

Otra nación que ha contribuido al análisis de los errores de los estudiantes es la antigua Unión Soviética, en la que se destacan des autores.

Kuzmitskaya determinó cuatro causas del error en el estudio de las dificultades: insuficiencia de la memoria a corto plazo, comprensión insuficiente de las condiciones del problema, debidos a la ausencia de reglas verbales para la realización de cálculos y por uso incorrecto de las cuatro operaciones básicas.

Menchinskaya destacó la regularidad de los errores de los estudiantes en educación matemática y enfatizó la complejidad de los procesos que están entre las causas potenciales del error. Señala cuatro áreas de causas no totalmente diferenciadas: debido a una realización incorrecta en una operación, por una comprensión conceptual cualitativamente insuficiente, por distracción o pérdida de interés y por la aplicación de reglas o algoritmos inadecuados.

Actualmente la mayoría de los investigadores de este campo (Mulhern G., 1989) consideran como características generales de los errores cometidos por los alumnos algunas de las siguientes:

- Con frecuencia los errores cometidos por los alumnos surgen de maneras sorprendentes, ya que por lo general se han mantenido ocultos para el profesor durante algún tiempo.
- A menudo son extremadamente persistentes, debido a que pueden reflejar el conocimiento de los alumnos sobre un concepto o uso particular de reglas nemotécnicas (utilización de la memoria). Son resistentes a cambiar por sí mismos ya que su corrección puede necesitar de una organización fundamental del conocimiento.
- Los errores pueden ser sistemáticos o por azar; los primeros son mucho más frecuentes y, por lo general, más efectivos para revelar los procesos mentales subyacentes, los cuales se toman como síntomas que señalan hacia un método o comprensión equivocada subyacente, que el estudiante considera y utiliza como correcto; los segundos reflejan falta de cuidado y lapsus ocasionales.
- En ocasiones los errores ignoran el significado; respuestas que son obviamente incorrectas, no se ponen en duda; los alumnos que cometen un error no consideran el significado de los símbolos y conceptos con los que trabajan.

A partir de estos estudios podemos afirmar que la mayor parte de los errores no tienen un carácter accidental, sino que surgen por las estrategias y reglas personales en la resolución de problemas basados en experiencias particulares e interpretaciones realizadas con base en los conocimientos matemáticos iniciales y que no se destruyen uno a uno con facilidad.

CLASIFICACIÓN

Los errores son a menudo el resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas, los cuales se presentan como resultado de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado, que se puede identificar con facilidad por el profesor o cuando el alumno utiliza procedimientos imperfectos y posee concepciones inadecuadas que no son reconocidas por el profesor.

Cuando los profesores comienzan a observar cuidadosamente el trabajo de los alumnos se encuentran con una serie de sorpresas, Brousseau, Davis y Werner (1986) expresan esto de la siguiente forma:

- Se hace evidente rápidamente que los errores de los alumnos son, con frecuencia el resultado de un procedimiento sistemático que tiene alguna imperfección; pero el procedimiento imperfecto lo utiliza el alumno de modo consistente y con confianza. En estos casos, los errores muestran un patrón consistente.
- Los alumnos tienen con frecuencia grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.
- Cuando es posible observar a los alumnos y también intercambiar información con sus profesores usuales, se ve que los alumnos emplean con frecuencia procedimientos imperfectos y tienen concepciones inadecuadas que no son reconocidas por sus profesores.
- También se hace evidente que los estudiantes son con frecuencia más inteligentes para inventar sus propios métodos originales de lo que se espera de ellos. Incluso cuando un método ha sido presentado por el profesor, un alumno puede desarrollar su propio método original, llegando hasta a ignorar el método del profesor.

Algunos de los resultados e interpretaciones más valiosos mediante el procesamiento humano de la información se han encontrado estudiando los errores.

Radatz (1979) realiza una clasificación de errores a partir del procesamiento de la información y establece 5 categorías generales:

1. Debidos a dificultades del lenguaje. El aprendizaje de los conceptos, símbolos y vocabularios matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores.
2. Debidos a dificultades para obtener información espacial.
3. Debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, habilidades y conceptos previos. Aquí se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenido y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática.
4. Debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y descodificar nueva información. Aquí también se encuentran:
   - Errores por perseveración.

- Errores de asociación.
- Errores de interferencia.
- Errores de asimilación.
- Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas, en las que se puede identificar el efecto de una impresión errónea obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas verbales.

5. Debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Davis (1984) elaboró una teoría de esquemas personales que se presentan de forma similar en distintos individuos que comparten las mismas experiencias y cuya combinación mediante los principios generales que regulan el procesamiento humano de la información le permiten tipificar e interpretar algunos de los errores más usuales de los escolares en el aprendizaje de las matemáticas. Davis plantea un mecanismo mediante el que analiza el pensamiento matemático humano y alguno de sus errores. Algunos de estos son:

- Reversiones binarias. Ej. 8·8=16; $2^{-4} = -16$
- Errores inducidos por el lenguaje o la notación. Ej. $2x - x = 2$
- Errores por recuperación de un esquema previo.
- Errores producidos por una representación inadecuada.
- Reglas que producen reglas. Ej. De la implicación: $(x-2)(x-3)=0$ $\rightarrow x=2$ ó $x=3$, se pasa a $(x-2)(x-3)=2$ $\rightarrow x=4$ ó $x=5$.

Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Inbar (1987) hacen una clasificación empírica de los errores y determinan 6 categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados.

1. Datos mal utilizados: se añaden datos extraños, se olvida algún dato necesario para la solución, se contesta algo que no es necesario, se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado, se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta, se hace una lectura incorrecta del enunciado.
2. Interpretación incorrecta del lenguaje: poner un problema en ecuaciones expresando una relación diferente de la enunciada, se designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto del usual y operando con él según las reglas usuales, la interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.
3. Inferencias no válidas lógicamente: se producen por artificios de razonamiento y no se deben al contenido específico: derivar de un enunciado condicional su recíproco o su contrario, derivar de un enunciado condicional y de su consecuente el antecedente, concluir un

enunciado en el que el consecuente no se deriva del antecedente necesariamente, utilizar incorrectamente los cuantificadores, realizar saltos injustificados en una inferencia lógica.

4. Teoremas o definiciones deformados: aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias, aplicar la propiedad distributiva a una función no lineal, realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula reconocibles.
5. Falta de verificación en la solución: se incluyen aquí los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada; si hubiera comprobado la solución con el enunciado el error hubiera podido evitarse.
6. Errores técnicos: errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.

La categorización de estos autores está fundamentada más en el conocimiento matemático que en el procesamiento de la información. Cuando se intenta avanzar desde la descripción de los patrones de error y las técnicas falsas hasta llegar a un análisis de las causas de los errores en los conocimientos de los alumnos parece claro que la interpretación con base en el procesamiento de la información ofrece una base teórica más completa para la clasificación de errores.

Alexandra Guétmanova (1989) se refiere a reglas de razonamiento demostrativo, en las que, si se viola, aunque sea una de ellas pueden darse errores concernientes a la tesis demostrada, los argumentos o la forma de demostración. A continuación, se refieren estas reglas y algunos errores lógicos en la demostración y la refutación.

I. Reglas concernientes a la tesis.
   1. La tesis debe ser lógicamente cierta, clara y precisa.
   2. La tesis debe ser siempre idéntica: una misma a lo largo de su demostración o refutación. La violación de esta regla induce al error lógico de “suplantación de la tesis”.

Respecto a la tesis demostrada se pueden cometer errores como:

1. “Suplantación de la tesis”. Consiste en que una tesis es suplantada por otra y se pretende demostrar o refutar esta tesis nueva.
2. “Argumento a favor de algo”. Consiste en la tentativa de influir en los sentimientos para creer en la veracidad de la tesis, aun cuando no se la pueda demostrar.
3. “Paso a otro género”. Hay dos variedades de este error; a) “quien trate de demostrar mucho, nada demostrará” y b) “quien demuestre poco, nada

demostrará". En el primer caso se da lugar al error cuando en vez de una tesis verdadera se pretende demostrar otra, más fuerte, que puede resultar falsa. Si de a se infiere b, pero de b no se infiere a, la tesis a es más fuerte que la tesis b. Por ejemplo, si en vez de demostrar que un individuo no fue quien comenzó la bronca se pretende demostrar que ni siquiera participó en ella, no se podrá demostrar nada si él peleó de veras y alguien lo vio. El segundo error surge cuando en vez de la tesis a demostramos la tesis b, más débil. Si, por ejemplo, tratando de demostrar que un animal es cebra, lo aseveramos porque tiene listas, no podremos demostrar nada porque el tigre también es un animal con listas.

II. Reglas concernientes a los argumentos.

1. Los argumentos, alegados para comprobar la tesis, deben ser verdaderos y no contradictorios recíprocamente.
2. Los argumentos deben constituir una base suficiente para corroborar la tesis.
3. Los argumentos deben ser juicios cuya veracidad ha sido demostrada aparte, independientemente de la tesis.

Respecto a los argumentos se pueden cometer errores como:

1. Falsedad de argumentos ("error básico"). Como argumentos no se toman juicios verdaderos sino falsos, que se presentan o se pretenden presentar por verdaderos.
2. "Anticipación de los argumentos". Se cae en este error cuando la tesis se apoya en argumentos no demostrados y estos no demuestran la tesis, sino solo la anticipan.
3. "Círculo vicioso". El error estriba en que la tesis se fundamenta con argumentos que se fundamentan con esa misma tesis. Es una variedad del error "empleo del argumento no demostrado".

III. Reglas concernientes a la forma de fundamentación.

La tesis debe ser una conclusión que se infiere lógicamente de los argumentos, según las reglas generales de razonamiento, o que se obtiene conforme a las reglas de demostración indirecta.

Respecto a la forma de demostración se pueden cometer errores como:

1. Inferencia imaginaria. Un ejemplo es la opinión muy propagada de que la redondez de la Tierra es demostrada porque se habla de los viajes alrededor del mundo y de que al aproximarse un buque a una costa se divisan sobre el horizonte, primero, las cimas de sus mástiles y, luego, su casco; sin embargo, de tales argumentos no se infiere que la Tierra tiene la forma de esfera, sino que tiene curvatura de superficie y el carácter cerrado de su forma.

2. De lo dicho con condición a lo dicho incondicionalmente. Un argumento, siendo verdadero únicamente dados un tiempo, una relación y una medida determinadas, no puede aducirse como incondicional y cierto en todos los casos.

Cuando ocurren Infracciones de las reglas de razonamiento que hemos mencionado, pueden presentarse de la siguiente forma:

1. Errores en los razonamientos deductivos. No se puede construir razonamiento de la afirmación de la consecuencia a la del argumento. De las premisas "si un número termina en cero se dividirá por 5" y "este número se divide por 5", no se infiere la deducción: "este número termina en cero".
2. Errores en los razonamientos inductivos. Uno consiste en la "universalización apresurada" del tipo: "todas las cosas hechas están mal". Otro error: "después de esto, entonces a causa de esto" (por ejemplo, después de la visita de un hombre, se descubrió la desaparición de una cosa, entonces él se la llevó).
3. Errores en los razonamientos por analogía. En algunos casos una analogía no rigurosa no da una conclusión cierta, sino probable.

¿CÓMO TRABAJAR CON LOS ERRORES?

Debemos señalar que los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje, además estos no aparecen solo por el azar sino que surgen, por lo general, en un marco conceptual consistente basado sobre conocimientos adquiridos previamente; es necesario que cualquier teoría de instrucción modifique la tendencia a condenar los errores culpabilizando a los estudiantes de los mismos, reemplazándola por la previsión de errores y su consideración en el proceso de aprendizaje pues todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, debidos a diferentes causas, algunos de los cuales se presentan inevitablemente.

Estudiar y analizar los errores cometidos por los estudiantes ha emergido recientemente como una gran línea de estudio e investigación en la educación matemática, con implicaciones considerables en gran parte de los campos de estudio en nuestra área.

Al cometer un error, una acción equivocada que a la larga provocará que la cadena de aprendizaje no ensamble correctamente, el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento y permite a los compañeros o al profesor ayudarle a completar el conocimiento adicional, o llevarlo a comprender por sí mismo aquello que estaba mal.

Una vez que se ha puesto de manifiesto que muchos errores no son fallos de memoria, sino que tienen raíces más profundas, se hace evidente que la enseñanza necesaria para remediarlos o evitar su aparición tiene que operar a un nivel profundo.

En el proceso usual de construcción de los conocimientos matemáticos van a aparecer de forma sistemática errores y por tanto el proceso deberá incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones.

Las formas que el docente realiza el control del aprendizaje en la clase es muy importante, pues de ello en gran medida depende que no se fijen los errores y se vayan superando las imperfecciones que se van produciendo en los aprendizajes, con la intención de lograr cada vez más la calidad en que estos se van adquiriendo. En este sentido, hay que observar la manera que durante la clase el maestro hace las preguntas, a quiénes se las dirige, de qué manera hace a los alumnos conscientes de sus errores y les da la posibilidad de rectificarlas, de qué manera indica en las libretas los errores, si también hace las rectificaciones necesarias y si concibe actividades para que eliminen las deficiencias que van manifestando.

El trabajo con los errores sirve no solo para reconocerlos, sino para evitarlos y corregirlos con mayor facilidad. Para ello es preciso reconocer la necesidad de utilizar el conocimiento previo, aunque esté equivocado, como fuente para nuevos conocimientos.

Hay que dirigir la atención a algunos complejos procesos que por obvios no le dedicamos mucha atención. Pocas veces nos detenemos a reflexionar sobre lo que el estudiante “sabe” (errores que comete como cosas ciertas), de las innumerables hipótesis que incansablemente ensaya; porque es cierto que hay muchos estudiantes que “saben” muchas cosas.

Para reconocerlos es necesario volver a pensar lo obvio, dudar de su solidez, replantear constantemente nuestros conocimientos y poner en un plano importante nuestras incertidumbres, para poder estar en condiciones de imaginar lo que pasa por la cabeza de un estudiante cuando enfrenta cada situación.

Cuando enfrentan ejercicios se pueden producir errores, de la misma forma que se producen aciertos; es necesario reflexionar sobre lo que provoca estas producciones erróneas. ¿Mi trabajo como maestro tiene algo que ver con esos errores?

Algunos no son fruto de deficiencias personales ni actos ingenuos, sino expresiones de actividad inteligente. El maestro siempre debe tener en cuenta que algunos son difíciles de eliminar, pues expresan partes de un pensamiento siempre activo. La función del docente no es perseguirlos, es entenderlos y hacerlos trascender porque permiten establecer los elementos necesarios para entender a profundidad los fenómenos didácticos. Hay que dejar hablar a los estudiantes, decir lo que piensan, lo que saben y cómo lo saben, preguntar lo que no saben, confrontar sus conocimientos.

Es necesario lograr que los alumnos no solo aprendan lo que han de evitar para no equivocarse sino también lo que han de hacer para llegar al conocimiento correcto. A él llegarán si consideran atentamente todas las cosas que conciben bien, separándolas de las que conciben confusa y oscuramente, y que pongan especial cuidado en hacerlo así.

Los estudiantes no deben temer que se encuentre falsedad en las cosas más ordinariamente representadas por ellos. La claridad no es una prueba de verdad, porque muchas veces se equivocan en cosas que les parecen más claras que el sol; los que hacen esto se apoyan, no en una concepción distinta, sino en algún prejuicio.

Los errores pueden ayudarnos a investigar cuestiones abstractas relativas a la naturaleza de las matemáticas a las que es difícil acercarse por otra vía. De nuevo esto implica utilizar el contraste destacado por el error, al igual que su contenido informativo, aunque con un enfoque distinto a un nivel superior de abstracción.

Para poder apreciar completamente el potencial educativo de los errores, como plataformas para interrogar, también es importante comprender la variedad de cuestiones y exploraciones que pueden motivarse por diferentes clases de errores matemáticos. De hecho, aunque la mayor parte de la gente parece identificar los errores con el uso o la comprensión deficiente de una regla, los errores matemáticos pueden presentar características bastante diferentes, por ejemplo, con respecto a:

- Grado de incorrección: Además de resultados falsos, se puede tener de hecho resultados parciales o aproximados, resultados correctos obtenidos mediante procedimientos ineficientes o inaceptables, resultados que se pueden tomar como correcto en un contexto determinado, pero no en otro, problemas para los que no se ha llegado a una solución, entre otros.
- Contexto matemático: Si estamos trabajando con problemas, algoritmos teoremas, definiciones, modelos, entre otras situaciones.

La interpretación exclusiva de los errores como instrumento de diagnóstico y corrección explota solo parcialmente el potencial educativo del error discutido. Con tal suposición solamente profesores e investigadores podrían estar implicados en el proceso de analizar el error. Los propios estudiantes quedarían privados de la oportunidad de implicarse en la actividad de explicar y dotar de sentido a sus propios errores, una actividad que puede resultar altamente motivadora y provocadora.

De aquí se tiene que los errores pueden emplearse como instrumento de motivación y como punto de partida para exploraciones matemáticas creativas, que implican actividades valiosas de planteamiento y resolución de problemas. También pueden proporcionar una comprensión más completa y profunda del contenido matemático y de la propia naturaleza de las matemáticas.

Utilizarlos como motivación y medio para interrogar sobre la naturaleza de las matemáticas puede mejorar la comprensión de estas como disciplina por parte de los estudiantes. Comprender una materia implica mucho más que simplemente “aprender con comprensión” su contenido básico. También incluye comprender su filosofía, la metodología empleada, el alcance y las limitaciones de la disciplina. Este tipo de comprensión, por desgracia, no es muy común en especial en las matemáticas y tratar de mejorarlo debiera ser extremadamente importante tanto para los estudiantes como para los profesores de cada nivel y materia.

Se han desarrollado varios tipos de tareas que proporcionan diversas maneras de descubrir conocimientos erróneos, provocar la reflexión o activar los conceptos pertinentes. Estas tareas son: empleo de diagramas, sustitución de números fáciles, juegos, invención de preguntas, calificación de tareas colectivas.

En los últimos años venimos asistiendo al desarrollo de nuevos modelos de evaluación que requieren de nuevos procedimientos de valoración; pero tan importante o más que la valoración que reciben los alumnos está el hecho de que esas valoraciones sirvan para reorientar su comprensión ayudándoles en la superación de sus concepciones deficientes y en la supresión de los errores.

La complejidad de las tareas de evaluación es una de las cuestiones en las que hay que insistir, así como en la necesidad de superar un tratamiento exclusivamente penalizador de las producciones erróneas o incorrectas de los alumnos, para ello hay que elegir una tarea realista que incorpore los conceptos erróneos y provocar así un conflicto cognitivo que desemboque en una discusión dirigida a resolver ese conflicto.

Una de las formas de plantear las evaluaciones es a través de ejercicios de selección múltiple, que con frecuencia es empleada para medir el aprendizaje de nuestros alumnos en innumerables controles aplicados por las instancias superiores, es conveniente que se realice un uso más sistemático por parte de los docentes de este tipo de evaluación de manera que los estudiantes se preparen o entrenen para enfrentarse a las mismas.

Este tipo de evaluación tiene sus particularidades, por lo que a través de un ejemplo mostraremos el proceder para su confección, ya que la selección múltiple no puede llevar a plantear respuestas que no tengan una relación adecuada con la posible lógica de errores que los alumnos pueden cometer en dependencia de sus creencias y que la admiten como válidos, de manera que podamos precisar luego dónde está el error y este pueda ser atendido hasta que se solvente (aquí está presente el denominado seguimiento al diagnóstico), no obstante somos del criterio que esta evaluación no puede concebirse de manera aislada sino que debe aparecer combinada con el intercambio conversacional con el alumno para saber qué lo llevó a realizar esa selección y no otra.

<u>EJEMPLO</u>:

Ante la pregunta o ejercicio siguiente:

1- El resultado de calcular $2^{(-3)}$ es:

a) ____ 0,002 b) ___ - 6 c) ____ - 8 d) ____ 0,125
e) ____ ninguna de las anteriores.

¿Por qué se escogen estas opciones y no otras?

- Cuando se plantea el inciso a) es porque los alumnos que afirman que $2^{(-3)}$ =0.002 se debe a lo que se conoce por deslizamiento de la memoria a aquellas respuestas que son ocasionadas por recordar equivocadamente las convenciones relativas a los exponentes negativos. En este caso el recurso del estudiante es recordar las ocasiones de uso de este tipo de expresiones lo cual lo lleva a la notación científica de los números. Se destaca esta interpretación del exponente negativo, pues posee un elemento de coherencia relacionado con la semántica de los números negativos, ya que los alumnos relacionan el exponente (- 3) con el proceso de "mover la coma a la izquierda".

  Lo anterior está fuertemente relacionado con la estrategia que utilizan muchos estudiantes de asociar una transformación en el signo del exponente (asociada a la noción de negatividad).

  Otras de las causas por la que escogen esta opción es que sí reconocen que $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$, pero lo que no saben es convertir en expresión decimal la fracción $\frac{1}{2^3}$; como ese número es positivo y menor que uno, entonces tiene la forma 0,... y el exponente indica tres lugares después de la coma (0,002).

- En el inciso b) se presenta una respuesta que se produce por lo que se conoce como persistencia de operaciones simples, que consiste en las respuestas que recurren a la suma, resta, multiplicación o división entre la base y el exponente. La noción de exponente es vista con frecuencia como la cantidad de veces que debe multiplicar la base, que la potenciación es un conjunto de operaciones de multiplicación "tantas veces como lo indica el exponente", ante la imposibilidad de utilizar este conocimiento en $2^{(-3)}$, se ven en la necesidad de buscar otro modelo, pero como hemos señalado, la noción ha sido presentada como cierto número de multiplicaciones, consecuentemente los estudiantes eligen la multiplicación y expresan que $2 \cdot (-3) = -6$, lo cual consiste en interpretar a la potenciación como una multiplicación, que forma parte de su universo de operaciones con números. Posiblemente este razonamiento es motivado por notar el patrón: $2^1=2\cdot1$ y $2^2=2\cdot2$ (un dos es la base y el otro el exponente).

  Otra de las causas de que los estudiantes seleccionen esta opción (al igual que la tercera) es la creencia que poseen de que, si la potencia de un número con exponente positivo es positiva, entonces la potencia de un número con exponente negativo es negativa.

- Para el caso presentado en el inciso c) los argumentos para establecer tal igualdad son coherentes con la enseñanza de la noción del exponente natural y con una concepción del (- 3) como un número natural con un signo menos junto a él. De ahí que los estudiantes plantean que $2^{(-3)} = -8$ ya que $2^3 = 8$ y se le coloca el signo.

  Otra de las causas por la escogen esta opción es por lo que se conoce como persistencia del modelo de multiplicación reiterada, o sea, recurren al modelo $2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2$ (n veces). Los estudiantes asumen que cuando el exponente es negativo se puede interpretar a través del modelo de multiplicación reiterada. A ello se agrega la concepción que tienen de los enteros negativos como un número natural con un símbolo menos asociado. Ante la disyuntiva de no saber cómo multiplicar (–3) veces la base 2 recurren a otro modelo y multiplican 3 veces la base (-2); entonces operan de la siguiente forma: $2^{(-3)} = -8$ ya que $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8$.

- Con respecto al inciso d) es la respuesta correcta y presupone que el estudiante además de conocer que una base elevada a un exponente negativo es equivalente a una fracción donde el numerador es la unidad y el denominador es la base elevada al valor absoluto del exponente inicial, realiza la conversión de esta fracción a expresión decimal, sin ninguna dificultad aparente.

- El inciso e) es uno de los que siempre debe estar presente, pues tiene varias funciones, entre las cuales se pueden señalar que el estudiante puede haber realizado otro razonamiento que no fue previsto por el profesor y no estaríamos condicionando sus respuestas; puede ocurrir que el estudiante conozca la propiedad de que se trata y reconozca el hecho de que $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$, sin embargo puede suceder que no considere este argumento como de tipo numérico, y lo considere como un símbolo, no reconoce que este “símbolo” es un número, que es equivalente a $\frac{1}{8}$ y que se puede realizar su conversión a una expresión decimal. Puede suceder, además, que el docente sea el que haya cometido algún error en la confección de la tarea y con este inciso la salvaríamos.

Observen ustedes que incluso ante una respuesta incorrecta el error puede ser motivado por más de una razón, de ahí la necesidad de insistir con otra técnica para cerciorarse de cuál ha sido la verdadera causa del error y poder plantearse una estrategia adecuada para solucionar su falsa concepción.

De esta manera es recomendable que cuando se elaboren estos tipos de evaluaciones se debatan en colectivo todos los posibles errores que pueden cometer los alumnos y se seleccionen adecuadamente las opciones que se les plantearán de manera que facilite el diagnóstico profundo de cada alumno, sin importar que el número de opciones exceda de cuatro, como clásicamente se plantea.

Tanto los profesores como los alumnos tienen fuertes concepciones previas sobre los errores y estas consideraciones influirán sus comportamientos en relación con las actividades que impliquen errores. Será importante que los profesores clarifiquen sus concepciones sobre las matemáticas, su aprendizaje y los errores para que puedan ayudar a sus alumnos a superar el sentimiento negativo que tienen hacia ellos.

A lo largo de los estudios e investigaciones en educación matemática podemos encontrar una gran variedad de métodos para el estudio de los errores en matemáticas. Mulhern los agrupa en cuatro amplias categorías:

- Contar simplemente el número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas. Este método, que tiene un valor diagnóstico limitado es cercano al método psicométrico.
- Análisis de los tipos de errores cometidos. Esta técnica implica usualmente clasificar diferentes tipos de error, examinar cómo se desvían de la solución correcta y hacer inferencia sobre qué factores pueden haber conducido al error.
- Análisis de patrones de error. Tales análisis pueden revelar errores sistemáticos que sean síntomas de concepciones inadecuadas o bien, al variar aspectos de las tareas los patrones de error que resultan, pueden proporcionar claves sobre qué estrategias se han utilizado.
- Construir problemas de tal modo que puedan provocar errores en los individuos. Aquí el investigador observa los patrones de error realizados por los individuos; especula sobre las posibles causas de estos errores; y, sistemáticamente, construye nuevos problemas de los que puede predecirse que inducirán a errores similares.

El método de procesamiento de la información está basado en la suposición de que los problemas matemáticos pueden descomponerse en varios componentes de procesamiento, sin embargo, estos subcomponentes son por su naturaleza internos y por tanto hay que utilizar métodos indirectos de observación; entre estos métodos indirectos se encuentra el análisis de los errores de los sujetos en sus producciones matemáticas.

CONCLUSIONES

Es indudable que el estudio sobre errores en el aprendizaje de las matemáticas se ha convertido, de manera creciente, en un aspecto de gran interés para la mejora en la comprensión y conocimiento de los alumnos, así como para la realización eficaz de las tareas docentes, bajo la premisa de que la ruina de los cimientos causa el derrumbamiento del edificio.

La posibilidad de transformación de la práctica educativa y de alcanzar un conocimiento libre de errores, cada vez más aproximado a la realidad, está en la adopción de una actitud científica ya que esta puede desencadenar el conflicto con las posiciones de conservación y estatismo que existan.

El trabajo con los errores permite mejor atención a las diferencias individuales con tareas específicas por desarrollar, para ello hay que tener presente que los mismos son una utilísima semilla que hay que saber tratar para que llegue a flor y a fruto. Al error no debe temérsele, al contrario, bienvenido sea siempre que haga uso de presencia, es uno de los mejores pretextos para problematizar la enseñanza, para activar el aprendizaje, para el trabajo con el diagnóstico; explícito está, requiere para su tratamiento de maestría pedagógica, de ser competente profesionalmente.

Es evidente que la verdad se consigue poco a poco con mucho trabajo, dedicación y esmero; se debe tener en cuenta que lo que queda por profundizar es más difícil y está mas oculto que lo que hasta aquí se muestra. El hábito de la indagación, que comienza por las cosas más sencillas y pasar gradualmente a las más difíciles, será mucho más útil que todas estas reflexiones.

BIBLIOGRAFÍA

1. Amat, M., González, O. y Gamboa, M.E. (2005). Las inferencias lógicas: una vía para desarrollar el aprendizaje del escolar de secundaria básica. In V Congreso Internacional Virtual de Educación.
2. Bonacina, M. (2000). Las dificultades en el aprendizaje de la Matemática. *Aula hoy, 6*(18), 22-23.
3. Cabaco, A. (1998). La presunción en el marco educativo: posibilidades y límites. *Aula hoy, 4*(10), 61-65.
4. Carmenates, O.A., Rodríguez, M. y Gamboa, M.E. (2014). Recursos didácticos para favorecer la resolución de problemas matemáticos. En S. Lima (Ed.), Didácticas de las Ciencias. Nuevas perspectivas (5), (pp. 11-38). La Habana: Sello Editor Educación Cubana.
5. Cramigna, S. (1984). Los errores de lectura: posibles interpretaciones. *Revista de Psicología y Ciencias Afines, 1*(5), 45-57.
6. Descartes, R. (2001). Obras. La Habana: Ed. Ciencias Sociales.
7. Fernández, H. y Gamboa, M.E. (2005). Actividades en las que se pone de manifiesto el uso de los medios de enseñanza en forma de sistema para la enseñanza de la Geometría. *Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación, 3*(1).
8. Gamboa, M.E. (2006). Aprendizaje y enseñanza de la matemática tomando como bases sus aplicaciones prácticas. In VI Congreso Internacional Virtual de Educación.
9. Gamboa, M.E. (2007). El diseño de unidades didácticas contextualizadas para la enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria Básica. Tesis en opción al Grado Científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Las Tunas.

10. Gamboa, M.E. (2012). *Enfoque vigotskiano del curriculum en la Pedagogía contemporánea. Unidades didácticas contextualizadas*. Saarbrucken, Alemania: Editorial Académica Española.

11. Gamboa, M.E. (2012). *Unidades didácticas contextualizadas para enseñar matemáticas*. Saarbrucken, Alemania: Editorial Académica Española.

12. Gamboa, M.E. y Borrero, R.Y. (2017). Influencia de la realidad contextual en la planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje de las Ciencias Básicas. En Grupo MDM Corp S.A.C. (Ed.). *Epistemología y práctica educativa en las instituciones de Educación superior* (pp. 349-378). Mexicali, México: Editorial REDEM.

13. Gamboa, M.E. y Borrero, R.Y. (2017). Influencia de los organizadores del curriculum en la planificación de la contextualización didáctica de la Matemática. *Boletín Redipe, 6*(1), 90-112.

14. Gamboa, M.E., Carmenates, O.A. y Amat, M. (2010). El legado de Vigotsky en la profesión educativa. *Opuntia Brava, 2*(2).

15. Gamboa, M.E. y Carmenates, O.A. (2011). Influencia del pensamiento vigotskiano en el nivel micro del diseño curricular. *Opuntia Brava, 3*(1).

16. Gamboa, M. E., Carmenates, O. A., Borrego, A. y Fernández, H. (2005). Pizarra, papel, computadora: un sistema de medios para la enseñanza de la Geometría. In V Congreso Internacional Virtual de Educación.

17. Gamboa, M.E. y Fonseca, J.J. (2007). Estrategia didáctica para la concreción de un modelo de diseño de unidades didácticas contextualizadas. *Alternativas, 12*(49), 179-196.

18. Gamboa, M.E. y Fonseca, J.J. (2014). Las unidades didácticas contextualizadas como alternativa para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. *Órbita Pedagógica, 1*(3), 1-28.

19. Lakatos, I. (1978). Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Madrid: Alianza Universidad.

20. Menin, O. (1998). Problemas de aprendizaje. *Aula hoy, 4*(10), 7-15.

21. Movshvitz-Hadar, N., Inbar, S. y Zaslavsky, O. (1987). Sometimes Students´ Error are our fault. *Mathematics teacher*, (80), 191-194.

22. Radatz, H. (1979). Types of Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, (9), 163-172.

23. Rico, L. (1995). Errores y dificultades de los estudiantes. En Grupo S.A de C.V. (Ed.). Educación Matemática. (pp. 69-108). México : Editorial Iberoamérica.

24. Santos, H., Gamboa, M.E. y Silva, N. (2017). La Geometría Plana: concepciones actuales para su aprendizaje a través de la instrucción heurística. *Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores, 4*(2).

25. Silva, J.L. y Gamboa, M.E. (2015). La evaluación sistemática de la Matemática en la Secundaria Básica. *Boletín Redipe, 4*(5), 64-74.

26. Zaldivar, L., Cruz, Y. y Gamboa, M.E. (2015). Mediación didáctica contextualizada de las tecnologías de la Información y la Comunicación para la

fijación de los conceptos matemáticos. *Didasc@lia: Didáctica y Educación, 6*(1), 49-68.

27. Zilverstein, J. (1998). Problemas actuales del aprendizaje escolar. *Desafío Escolar, 2*(1), 3-6.