

## **Visualização no contexto de ensino da Geometria Diferencial: o caso do conjunto de vetores introduzidos por Jean Frédéric Frenet (1816 - 1900)**

### **Didactic Engineering for the development of a didactic situation in teaching the Frenet Trihedron using the GeoGebra software**

*Ana Carla Pimentel Paiva<sup>1</sup>*

*Francisco Regis Vieira Alves<sup>2</sup>*

*Helena Maria Barros de Campos<sup>3</sup>*

#### **Resumo**

A pesquisa teve como objetivo associar novas tecnologias ao ensino de Matemática no nível superior, por meio da utilização do software dinâmico GeoGebra, visando proporcionar uma melhor visualização de conceitos da Geometria Diferencial (GD) e facilitando a compreensão desses conteúdos matemáticos abstratos. Neste artigo, apresentamos propostas para a aplicação do GeoGebra no ensino de GD, empregando a metodologia da Engenharia Didática (ED), o que nos permitiu compreender a gênese dos conceitos matemáticos envolvidos e os obstáculos epistemológicos que dificultam sua assimilação. Além disso, discutimos possibilidades de situações didáticas que podem favorecer a aprendizagem dos alunos, promovendo uma compreensão mais intuitiva e significativa dos conceitos abordados.

*Palavras-chave:* geogebra , geometria diferencial, engenharia didática

---

<sup>1</sup> Licenciado em Matemática. Mestre em Ensino de Ciências e Matemática PGECM – IFCE(2019). Doutorado em andamento em Ensino de Matemática no IFCE, RENOEM, Fortaleza- CE, BRASIL. E-mail: [carlapimentel00@gmail.com](mailto:carlapimentel00@gmail.com) ORCID <https://orcid.org/0000-0001-5801-9562>

<sup>2</sup> Licenciado em Matemática. Doutorado em Ensino de Matemática (UFC - 2011). Professor do IFCE, RENOEM, Fortaleza- CE, BRASIL. E-mail: [fregis@ifce.edu.br](mailto:fregis@ifce.edu.br) .ORCID <https://orcid.org/0000-0003-3710-1561>

<sup>3</sup> Licenciado em Matemática. Doutorado em Matemática - Universidad de Educación a Distancia (2008) Professora de UTAD, Departamento de Matemática - Vila Real, Portugal E-mail: [hcampos@utad.pt](mailto:hcampos@utad.pt) ORCID <https://orcid.org/0000-0003-2767-0998>



### Abstract

This The research aimed to associate new technologies with the teaching of Mathematics at higher education, through the use of the dynamic software GeoGebra, aiming to provide a better visualization of Differential Geometry (GD) concepts and facilitating the understanding of these abstract mathematical contents. In this article, we present proposals for the application of GeoGebra in teaching GD, using the Didactic Engineering (DE) methodology, which allowed us to understand the genesis of the mathematical concepts involved and the epistemological obstacles that hinder their assimilation. Furthermore, we discuss possibilities for teaching situations that can favor student learning, promoting a more intuitive and meaningful understanding of the concepts covered.

*Keywords:* geogebra, differential geometry, didactic engineering

### Introdução

No contexto da constituição e consolidação de estudos e investigações em torno dos fenômenos relativos ao ensino e a aprendizagem específica da Matemática (Douady, 2008), registramos que a evolução da tradição de uma abordagem que costuma aliar um design de investigação e, a depender da natureza dos fenômenos considerados, um corpus teórico capaz de explicar e significar eventuais problemas relacionados com a aprendizagem. O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico- Funcap - Brasil e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico- CNPQ- Brasil. Trabalho financiado por Fundos Nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito dos projetos (<https://doi.org/10.54499/UIDB/00194/2020>) e (<https://doi.org/10.54499/UIDP/00194/2020>)

Nesses termos, Artigue (2020) assinala por exemplo, a utilização da noção de Engenharia

Didática, como design metodológico de organização de uma investigação aliada com a Teorias das Situações Didáticas. Assim, a Didática da Matemática defendia a construção e o desenvolvimento do conhecimento, visando fornecer esclarecimentos, conceitos e teorias, além de meios para prever e analisar situações relacionadas à transmissão do saber matemático, fundamentando-se na epistemologia desse conhecimento.

Ao investigar a gênese dos conhecimentos matemáticos e os obstáculos epistemológicos enfrentados pelos estudantes, a Engenharia Didática permite a elaboração, a experimentação e a validação de sequências didáticas, contribuindo para a construção de saberes matemáticos mais acessíveis e significativos, conforme Artigue (2021): “as engenharias didáticas têm sido uma força motriz essencial para o desenvolvimento da pesquisa em didática da matemática na França, uma força motriz essencial para sua dinâmica praxeológica”. (p.34)

A Engenharia Didática desenvolvida nos centros universitários de Institutos de Pesquisa sobre o ensino de Matemática (Institut Universitaire de Recherche sur L'Enseignement des Mathématiques - IREM) que fomentavam a criação de recursos e meios para aprimorar o trabalho em sala de aula, que posteriormente evoluiriam para uma estruturação de um quadro teórico mais amplo, de modo a possibilitar a concepção de situações de aprendizagem e também servir como referencial metodológico para a posterior análise do material empírico (Alves, 2016a).

Dessa forma, a pesquisa foi desenvolvida com base nos princípios da metodologia da Engenharia Didática, adotando esse referencial para investigar e discutir as contribuições que o uso do software GeoGebra pode oferecer ao ensino e à aprendizagem de conceitos matemáticos no nível superior. A escolha dessa metodologia se justifica por sua abordagem estruturada, que

permite analisar a gênese do conhecimento matemático e os desafios epistemológicos enfrentados pelos estudantes na construção desse saber.

Disciplinas como Cálculo de Várias Variáveis (CVV) e Geometria Diferencial apresentam um alto grau de abstração, exigindo dos alunos a capacidade de interpretar objetos matemáticos em diferentes representações, como algébrica, geométrica e analítica. Muitos estudantes encontram dificuldades ao visualizar superfícies no espaço tridimensional, compreender a variação de funções em múltiplas direções e interpretar conceitos fundamentais, como derivadas parciais e curvas parametrizadas. Esses obstáculos podem levar a uma aprendizagem mecânica e desconectada da intuição geométrica.

Nesse contexto, o GeoGebra surge como uma ferramenta potencialmente útil para proporcionar uma abordagem mais interativa e visual, auxiliando na superação dessas barreiras cognitivas e promovendo uma compreensão mais significativa dos conceitos estudados (Paiva e Alves, 2023). A partir dos elementos supra indicados, no presente trabalho restringir-nos-emos ao objeto matemático denominado, de modo *standard*, em Geometria Diferencial, de Triedro de Frenet ou triedro de Frenet-Serret. Tal terminologia evidencia o trabalho do matemático francês Jean Frédéric Frenet (1816–1900), cujo estudo sobre as propriedades das curvas levou à formulação das equações que descrevem seu comportamento local.

Essas equações, embora já tenham sido exploradas anteriormente, tornaram-se amplamente conhecidas por meio dos trabalhos de Frenet, a perspectiva adotada pelo matemático é explicada por Zucker (2005), ao mencionar que:

Approximately a half century earlier a fundamental series of discoveries began concerning the differential geometry of curves, and they continued through the time period dominated by the Gestalt psychology movement. Frenet (in 1847) and,

independently Serret (in 1851), introduced the idea of adapting a coordinate frame directly to a curve, rather than using extrinsic coordinates. The remarkable discovery was that changes in (derivatives of) this frame could be expressed directly in terms of the frame itself. The result is a beautiful expression of the theory of curves that fits precisely the requirements for perceptual organization above. (Zucker, 2005, p. 1).

Os trabalhos iniciais surgiram por meio do matemático Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) foram publicados em 1826, na obra *Leçons sur l'application du calcul infinitésimal à la géométrie*, na qual foram introduzidos novos métodos ao estudo da Geometria Diferencial, além de sistematizar e esclarecer diversos cálculos realizados por seus predecessores. Em particular, Cauchy aprimorou o trabalho de Gaspard Monge sobre a curvatura  $k$  e a torção  $\tau$  de uma curva espacial, determinando as fórmulas que descrevem o comportamento local da curva em função desses parâmetros em relação a um sistema de coordenadas móvel.

Essas fórmulas, atualmente conhecidas como equações de Frenet-Serret, foram redescobertas por Jean Frenet (1816-1900) e Joseph Serret (1819-1885), que publicaram seus trabalhos em 1847 e 1850, respectivamente (Gorodski, 2002). Prosseguiremos, com a exploração, de modo detalhado nosso quadro de referencial teórico, detalhando a nossa metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática, esmiuçando as suas fases, explicitando as fases para a elaboração das situações didáticas.

### ***Fundamentação Teórica***

A definição matemática empregue de curva diferenciável, será a de uma aplicação diferenciável  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^\infty$ , ou seja, uma curva em que podemos derivar quantas vezes desejarmos, em que  $I$  é um intervalo aberto da reta. Em coordenadas cartesianas, se têm  $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , em que a variável  $t \in I$  é dita parâmetro da curva, e o subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  dos

pontos  $\alpha(t)$  é chamado traço da curva (Paiva e Alves, 2018). Por simplicidade notacional, trataremos curvas diferenciáveis apenas por curvas.

Além disso, determinaremos que uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  será considerada regular quando  $\forall t \in \mathbb{R}$  temos que  $\alpha'(t) \neq 0$ . Estabeleceremos também que uma curva está parametrizada pelo comprimento do arco - ppca quando  $\forall t \in I$ , o comprimento do arco, norma dessa curva é unitária, ou seja  $|\alpha'(t)| = 1$ , em que  $|\alpha'(t)| = \sqrt{[x_1'(t)]^2 + \dots + [x_n'(t)]^2}$ .

Prosseguiremos nosso estudo, definindo o vetor tangente a uma curva  $\alpha$  em  $t$ , como  $T(t) = \alpha'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$ , e o vetor tangente unitário a  $\alpha$  em  $t$  como  $T_u(t) = \frac{T(t)}{|T(t)|}$ , onde  $|T(t)| = |\alpha'(t)| = |(x_1'(t), \dots, x_n'(t))| = \sqrt{[x_1'(t)]^2 + \dots + [x_n'(t)]^2}$ .

Veja que, se temos uma curva ppca o vetor tangente coincide com o vetor tangente unitário pois como  $|\alpha'(t)| = 1$ , temos que o vetor tangente unitário dado por  $T_u(t) = \frac{T(t)}{|T(t)|} = \frac{T(t)}{|\alpha'(t)|} = T(t)$ .

Compreendemos ainda que, se um vetor  $X$  possui norma  $|X|$  constante, então  $X'(t)$  é perpendicular a  $X(t)$ , para todo  $t \in I \subset \mathbb{R}$ . Dessa forma, tomando uma curva ppca, visto que  $T(t)$  tem norma 1, temos que  $T'(t)$  é perpendicular a  $T(t)$ . Posteriormente, a autora define como vetor normal em uma curva ppca em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $k(t) > 0$ , o vetor  $N(t) = \frac{T'(t)}{k(t)}$  (Teneblat, 2008). Portanto, diferentemente do que ocorre no espaço bidimensional, para determinar a curvatura de uma curva regular em  $\mathbb{R}^3$ , é necessário, inicialmente, realizar uma operação denominada reparametrização.

Sejam  $\alpha(t)$ ,  $t \in I$ , uma curva regular de  $\mathbb{R}^3$ , definiremos a função comprimento de arco

da curva  $\alpha(t)$  a partir de um ponto  $t_0$  como  $s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt$ . Desse modo, se tivermos  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular e  $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$  a função comprimento de arco de  $\alpha$  a partir de  $t_0$ . Então, sempre existe a função inversa  $h$  de  $s$ , definida no intervalo aberto  $J = s(I)$ , e  $\beta = \alpha \circ h$  representa uma reparametrização de  $\alpha$ , onde  $\beta$  está parametriza pelo comprimento de arco – *ppca*, sendo importante evidenciar que a função composta  $\beta = \alpha \circ h$  é uma curva regular de  $\mathbb{R}^3$  que apresenta o mesmo traço de  $\alpha$ .

De agora em diante, prosseguiremos o nosso estudo com curvas regulares empregando situações que propiciem uma visualização desses conceitos, com o auxílio do Geogebra. Utilizando esse posicionamento como um alicerce para a razão da utilização de curvas regulares, Teneblat (2008), afirma:

Para o desenvolvimento da teoria local das curvas é preciso que exista a reta tangente a uma curva  $\alpha$  para cada valor do parâmetro  $t$ , para isso é suficiente que o vetor tangente a  $\alpha$  seja não nulo para todo  $t$ , ou seja, as retas tomadas têm que ser regulares. (p. 34)

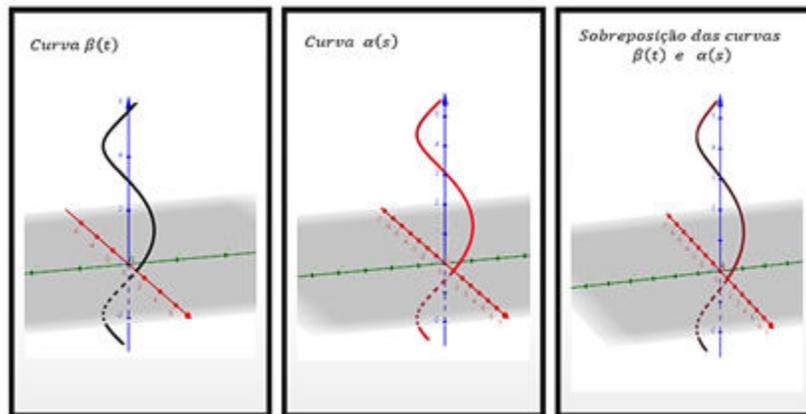
A título de exemplo, foi elaborado no software GeoGebra com o intuito de auxiliar o entendimento o processo reparametrização pelo comprimento de arco de uma curva, a reparametrização de uma hélice circular cuja expressão  $\beta(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$  e consequentemente comprimento de arco  $|\beta'(t)| = \sqrt{2}$ .

A função comprimento de arco da hélice em questão é dada por  $s(t) = \int_0^t \sqrt{2} dt = \sqrt{2} t$ , assim se adota na operação mudança de parâmetro  $h(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}$  reparametrizando a curva pelo comprimento do arco e encontrando a expressão  $\alpha(s) = \left( \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$ .

Na figura 1, dispomos da representação da hélice pela Curva  $\beta(t)$  e sua respectiva reparametrização a Curva  $\alpha(s)$ .

**Figura 1.** Representação da conservação do traço da curva após uma reparametrização

*pelo comprimento de arco.*



Fonte: Paiva (2019, p.71)

A visualização desenvolvida na Figura 1, permite verificar a existência da igualdade do traço dessas curvas  $\beta(t)$  e  $\alpha(s)$ , e o dinamismo do programa ainda permite realizar a sobreposição entre essas curvas e assim verificar que qualquer ponto curva  $\beta(t)$  pertence a  $\alpha(s)$  e viceversa nos fornecendo assim a comprovação visual do teorema.

### ***O triedro introduzido pelo matemático francês Jean Frédéric Frenet (1816 - 1900)***

Para a definição e estudo do Triedro de Frenet, utilizaremos uma curva regular diferencial em  $\mathbb{R}^3$ , parametrizada pelo comprimento do arco. Portanto, trazemos à memória que uma curva em  $\mathbb{R}^3$  está parametrizada pelo comprimento do arco quando  $|\alpha'(t)| = |x'(t) + y'(t) + z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = 1$ .

Além disso, empregaremos a definição de a curvatura de  $\alpha$  em  $s$ , denotada por  $k(s)$ , como uma função dada por:  $k(s) = |\alpha''(t)|$ . Conforme Mendes (2007) a noção geométrica de curvatura  $k(s)$  no espaço vetorial real de dimensão três como “uma medida da variação de  $\alpha'(t)$ , ou seja, é a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção” (Mendes, 2007, p.2).

Para ilustrarmos as noções algébricas de vetor tangente e vetor normal, no viés de

Teneblat (2008) em  $\mathbb{R}^3$ , é importante salientar que por admitirmos que a curva é ppca, não se faz necessários distinguirmos o vetor tangente unitário do vetor tangente, pois como visto anteriormente nesse caso tais vetores não apresentam distinção:

$$T(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s)).$$

Assim, designaremos o vetor unitário ortogonal a  $T(s)$  como vetor normal a curva  $\alpha$  em  $s$ , expressando na seguinte fórmula  $N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)}$ . Por fim, definiremos um outro vetor existente nessa dimensão, intitulado vetor binormal à  $\alpha$  em  $s$ , gerado pelo produto vetorial de  $T(s)$  e  $N(s)$ :

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

Observe que a norma do vetor binormal é unitária,  $|B(s)| = 1$ , pois  $T(s)$  e  $N(s)$  são vetores unitários. Prosseguindo, derivando tal vetor obtemos que  $\langle B(s), B'(s) \rangle = 0$  e que

$$B'(s) = T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s).$$

Como ponderamos anteriormente  $T'(s) \times N(s) = 0$ , dado que o ângulo entre esses vetores é nulo, por conseguinte  $B'(s) = T(s) \times N'(s)$ , inferindo assim que  $B'(s)$  é ortogonal a  $T(s)$ . Isto é,  $B'(s)$  corresponde ao produto de  $N(s)$  por um número real.

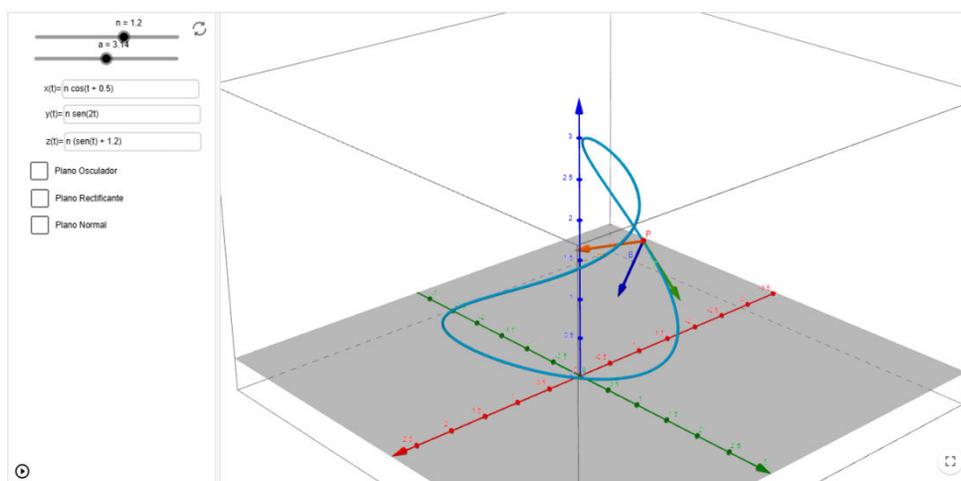
Representaremos tal número real por  $\tau(s)$ , denominando o torção da curva em  $s$ . A noção intuitiva referente ao conceito de torção pode ser expressa como a medida de quanto uma curva se afasta de um determinado plano. Além disso, vale salientar que a equação da *torção* também pode ser apresentada na forma  $\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle$ .

Teneblat (2008, p.67) demonstra por meio de uma reparametrização pelo comprimento do arco que dada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular de parâmetro  $t$ , podemos estabelecer que a *torção* da curva em  $t$ , pode ser representada pela expressão  $\tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}$ .

**Figura 2.** Representação do Triedro de Frenet-Serret proposto por Teneblat (2008)

**Figura 3.** Representação da expressão  $\alpha(t) = (n \cos(t + 0.5), n \sin(2t), n(\sin(t) + 1.2))$

Fonte: Elaborado pelos autores



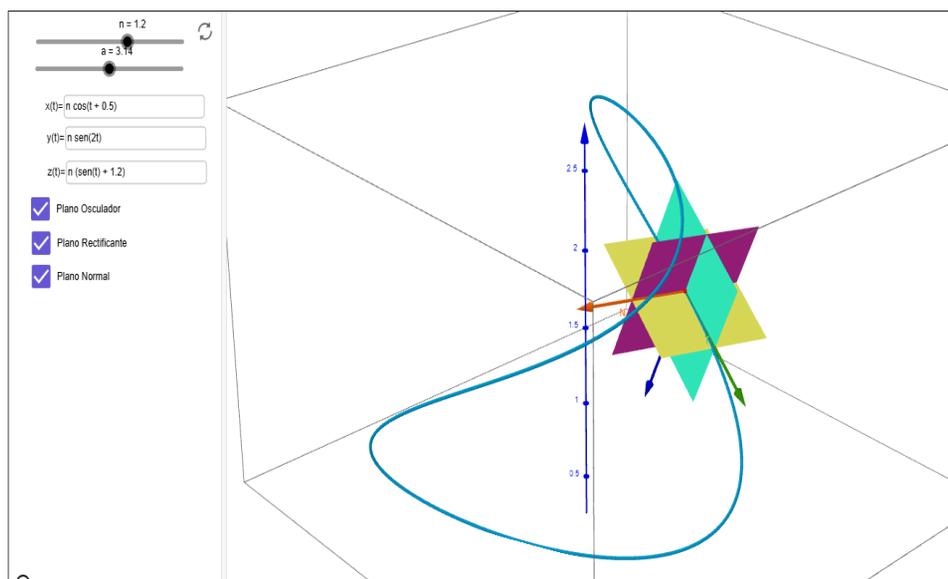
O referencial ortonormal composto pelos vetores  $T(s)$ ,  $N(s)$ ,  $B(s)$  denominado Triedro *de Frenet* determina três planos: o Plano Osculador que é o plano formado pelo vetor tangente e o vetor normal, o Plano Normal é o plano formado pelo vetor normal e o vetor binormal, e o Plano Retificante é plano formado pelo vetor binormal e o vetor tangente. A seguir, apresentaremos um esquema de uma curva de uma superfície e o Triedro de Frénet-Serret, na figura 3.

Afim de proporcionar um melhor entendimento sobre o comportamento desses vetores e do triedro de Frenet, elaboramos uma visualização desses conceitos utilizando o software GeoGebra. Na Figura 3, apresentamos uma curva que é representada pela expressão  $\alpha(t) = (n \cos(t + 0.5), n \sin(2t), n(\sin(t) + 1.2))$  em que destacamos os vetores tangente e normal em diferentes pontos da curva.

A visualização no GeoGebra facilita a compreensão desses conceitos algébricos e geométricos, permitindo que os alunos explorem as propriedades da curva de forma interativa e intuitiva. Essa representação gráfica permite observar o comportamento dos vetores ao longo da curva, ilustrando claramente a relação entre a direção do vetor tangente, que indica a direção da curva em um determinado ponto, e o vetor normal, que é perpendicular ao tangente e fornece informações sobre a curvatura da curva.

Além de poder analisar variação dos vetores pertencentes ao Triedro de Frenet, e dos respectivos planos gerados por eles, na representação da curva anterior, em que o plano retificante está representado na cor rosa, o plano osculador na cor amarela, por fim o plano normal na cor azul, como se pode observar na Figura 4.

**Figura 4.** *Representação dos planos resultantes do Triedro de Frenet, plano osculador(amarelo), retificante(rosa) e normal(azul) por meio do software Geogebra*



Fonte: Elaborados pelos autores

É importante destacar que os vetores apresentados nesta seção pertencem a um referencial ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , por conseguinte relacionam-se por meio de combinações lineares retratadas através de equações que serão apresentadas na seção subsequente.

### ***Equação de Frenet para curvas***

Seja  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento do arco e tal que  $k(s) > 0, \forall s \in I$ , levando em consideração que o triedro de Frenet da curva  $\alpha$  em  $s$  é um referencial ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , iremos obter os vetores  $T'(s)$ ,  $N'(s)$ ,  $B'(s)$  como combinação linear de  $T(s)$ ,  $N(s)$ ,  $B(s)$ . Nas seções anteriores, assinalou-se as seguintes relações

$$\begin{cases} T'(s) = k(s).N(s) \\ B'(s) = \tau(s).N(s) \end{cases}$$

Desse modo, elaboraremos uma expressão associada a  $N'(s)$ , advindo que o vetor normal em um determinado ponto pode ser obtido como produto vetorial entre os vetores binormal e tangente nesse ponto ( $N(s) = B(s) \times T(s)$ ). Ao derivarmos tal relação, dispomos :

$$(N(s) = B(s) \times T(s))' = N'(s) = B'(s) \times T(s) + B(s) \times T'(s)$$

Repare que podemos substituir as relações desenvolvidas anteriormente para  $T'(s)$  e  $B'(s)$ , obtendo  $N'(s) = (\tau(s).N(s)) \times T(s) + B(s) \times (k(s).N(s))$ .

Devido a orientação do referencial de Frenet e a definição dos vetores binormal ( $B(s) = T(s) \times N(s)$ ) e tangente ( $T(s) = N(s) \times B(s)$ ), encontramos a última relação :

$$N'(s) = -\tau(s).B(s) - k(s).T(s).$$

### ***Procedimento Metodológico***

Analisando os obstáculos relativos ao processo de ensino do Triedro de Frenet, devemos analisar a natureza dos objetos e processos matemáticos, de per si, podem proporcionar entraves e bloqueios ao ensino (Alves, 2016a).

O entendimento desses bloqueios é sistematizado pelo filósofo Gaston Bachelard (1884–

1962), que os denomina como obstáculos epistemológicos. Segundo Bachelard (1995), esses obstáculos são elementos que podem retardar ou até mesmo impedir o processo de compreensão do estudante que está submetido a uma ação intencional de ensino.

A transição para um nível mais avançado de compreensão matemática é frequentemente marcada pela introdução à geometria, onde conceitos e métodos adquirem um novo nível de formalidade, conforme Artigue et al., (2024): No mundo do ensino, de fato, a entrada no rigor matemático é simbolizada pela entrada no mundo da geometria demonstrativa, e a referência implícita ou explícita à geometria grega ligada a essa representação ajuda a transmitir e reforçar essa ficção de um rigor fora do tempo e do espaço. Desse modo, a sistematização prevista pela Engenharia Didática no contexto do Triedro de Frenet (TDF) vai envolver uma abordagem estruturada para o ensino dos conceitos associados a essa ferramenta geométrica.

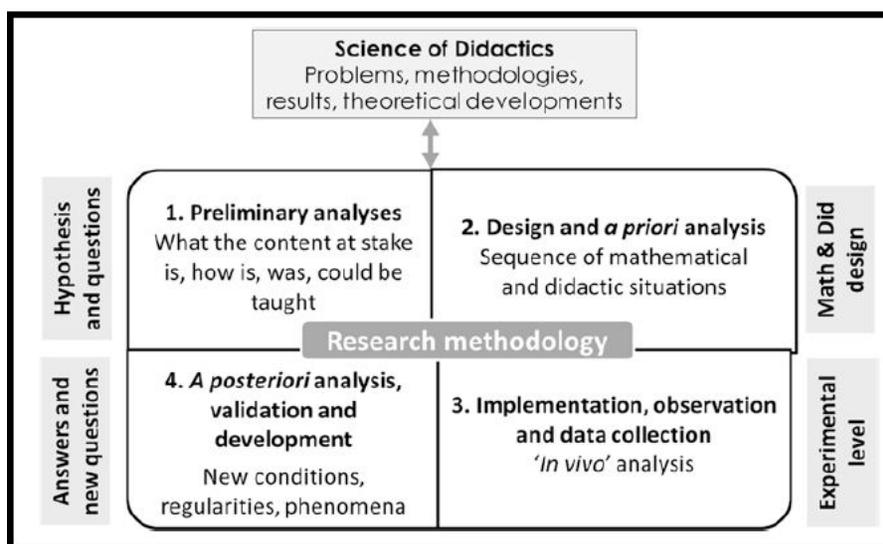
### ***Estruturação Metodológica do Ensino do Triedro de Frenet segundo a Engenharia Didática***

A Engenharia Didática, enquanto metodologia de pesquisa, é definida por Douady (2008, p. 62) como “um conjunto de sequências de aulas concebidas, organizadas e articuladas no tempo de maneira coerente, por um professor-engenheiro, com o objetivo de realizar um projeto de aprendizagem para uma população específica de alunos”.

A metodologia caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre as análises iniciais e finais da pesquisa, denominadas de análises a priori e análises a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, que pode ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste (Almouloud e Coutinho (2008)).de

De modo especial, assumimos posicionamento semelhante ao de Barquero & Bosh (2015), sobretudo quando examinamos a implementação do aparato construído e que inclui a intervenção didática previamente estruturada, sua observação e a coleta de dados. Este nível experimental envolve uma análise “in vivo”, isto é, uma análise desenvolvida em tempo real (ou logo após) o que está acontecendo na sala de aula.

**Figura 5** Descrição de um itinerário para o desenvolvimento de uma Engenharia Didática de Formação segundo Barquero & Bosch (2015)



Fonte: Barquero & Bosch (2015)

Em relação à sistematização proposta pela ED, estabelecemos que ela é composta por quatro fases: análises prévias, análises a priori, experimentação e análise a posteriori e validação. Essas etapas serão apresentadas nas seções a seguir.

### ***Análises prévias***

Na primeira fase da ED, as análises prévias, o pesquisador determina as principais dimensões que definem o problema a ser estudado e como se relacionam com o sistema de

ensino, por exemplo: as dimensões epistemológicas, cognitivas e didáticas (Almouloud, 2007). De forma mais sucinta, na perspectiva de Artigue (1995), (Alves 2018; Alves et al., 2018, p.13) descreve que a dimensão epistemológica abrange as “características do saber”, a dimensão cognitiva explora “as características cognitivas do público alvo” e por fim a dimensão didática que averigua “as características relacionadas ao funcionamento do sistema de ensino”.

Desse modo, investigamos a gênese do campo epistêmico matemático de Triedo de Frenet - TDF e os respectivos conceitos matemáticos desse campo, na análise epistemológica, para a previsão das possíveis concepções dos alunos, na análise cognitiva, e a adaptação dos conceitos científicos do Triedo a um saber escolar, na análise didática.

Nesta análise preliminar pode ser feita uma revisão bibliográfica envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico epistemológicos dos assuntos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino.

### *Concepção e análises a priori*

Na segunda fase da ED, as análises priori, o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de situações didáticas com a finalidade de responder às questões e validar as hipóteses suscitadas na fase anterior (Almouloud,2007). Na concepção de Brousseau (1986), o desenvolvimento dessas situações deve ser análoga àquela que originou o conhecimento, de modo que a aprendizagem dos sujeitos agentes (os alunos) ocorre por adaptação, assimilação e equilíbrio.

De forma consoante, Almouloud (2007), esclarece a formulação dessas situações didáticas, atestando que o pesquisador deva conceber “situações-problema de modo a permitir

“ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos”. (p. 174)

Assim devemos realizar uma análise matemática do conteúdo matemático explorado, para que possamos identificar os métodos, estratégias de resolução em cada situação, caracterizar os conhecimentos e saberes matemáticos prévios necessários para que o aluno consiga responder a situação-problema (Dos Santos, 2017).

### ***Experimentação***

A experimentação corresponde à etapa em que a sequência de situações didáticas é aplicada, buscando assegurar a obtenção de resultados práticos alinhados à análise teórica (Almouloud, 2007). Nesse momento, o dispositivo planejado na análise a priori é colocado em prática. Cabe ao professor apresentar os objetivos da pesquisa e explicitar as condições necessárias para a realização do trabalho, estabelecendo, assim, um contrato didático (Almouloud, 2007).

### ***Análise a Posteriori e Validação***

A etapa denominada análise a posteriori e validação corresponde ao tratamento das informações obtidas durante a aplicação da sequência didática, caracterizando a fase experimental da pesquisa (Almouloud, 2007). Nesse momento, a análise dessas informações permite confrontar as hipóteses formuladas na análise a priori, viabilizando a "interpretação dos resultados e as condições sob as quais as questões levantadas foram respondidas" (Pommer, 2013, p. 26). Dessa forma, com base nos dados coletados, é possível verificar se as hipóteses se confirmam e quais "são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá a validação do objetivo da pesquisa" (Pommer, 2013, p. 26).

Por essa razão nossa opção conceptual para a elaboração da sequência didática prevista

para a segunda fase da ED. Além disso, empregamos a Teoria das Situações Didáticas - TSD, devido a sua estrutura para a elaboração de situações didáticas, que especificaremos mais adiante. Ademais, destacaremos a existência de uma vasta literatura que relacionam que a TSD e a ED, evidenciando que essa complementariedade que pode possibilitar a ruptura de determinados formatos de ensino (Alves, 2016b).

### ***Teoria das Situações Didáticas - TSD***

A Teoria das Situações Didáticas foi concebida pelo educador matemático Guy Brousseau com o intuito de aplicar situações ditas identificáveis (naturais ou didáticas) para modelar, de uma maneira geral, o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, considerando as especificidades dos conteúdos (Almouloud, 2007). A TSD desenvolve formas de apresentação de determinado conteúdo matemático, com a utilização de situações didáticas planejadas, na compreensão da existência de um Triângulo Didático composto pelo aluno - professor - saber, e suas dinâmicas e complexas relações Batista et al., (2021).

Além disso, Brousseau (2008) defende que para que ocorra o entendimento por parte do aluno deve existir uma interação entre o aluno e o conhecimento, a denominada situação didática, que ocasiona a apreensão do conhecimento. Assim, a situação didática é caracterizada por “um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado” (Brousseau, 2008, p.20).

A partir disso, os autores Batista et al., (2021), afirmam que essa teoria:

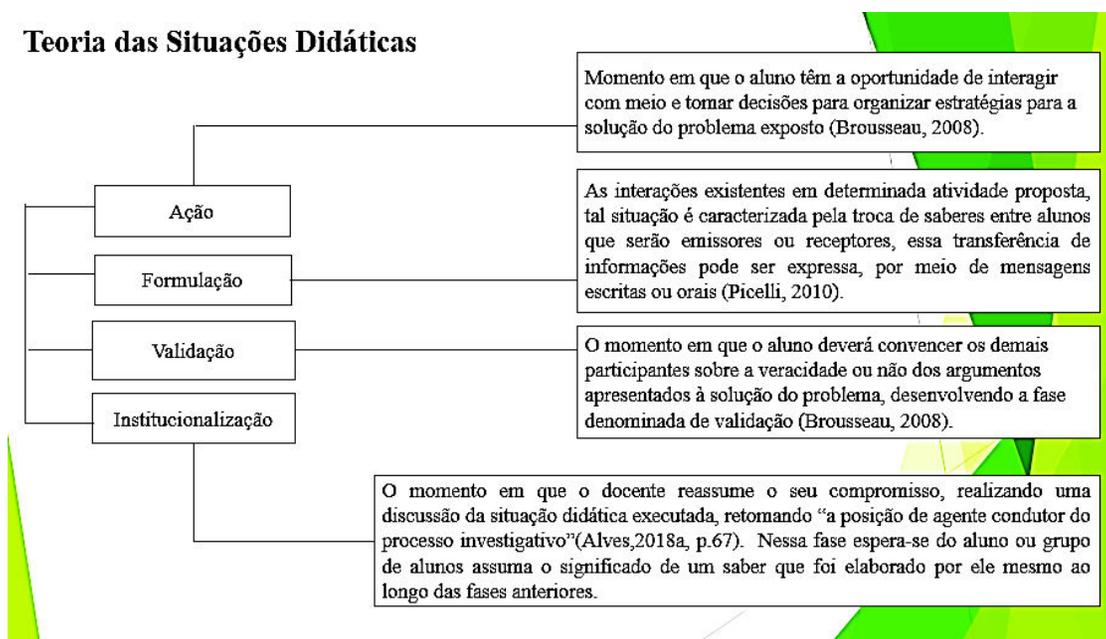
Priorizou a ação do estudante como produtor de seu conhecimento matemático, enquanto enfatizou o papel do professor como o responsável por criar o meio adequado, com condições para que os alunos, a partir de seus conhecimentos e experiências prévias, apropriem-se dos conceitos matemáticos. (Batista et al., 2021, p. 579).

Conforme Brousseau (2008) as situações de ensino devem ser elaboradas pelo professor

para que o aluno seja capaz de construir e se apropriar do conhecimento. O processo de assimilação dos conceitos por meio da TSD é dividido em dialéticas que podem ser modeladas de acordo com as situações de ação, formulação, validação e institucionalização, possibilitando a aprendizagem do aluno.

Deste modo, podemos sintetizar como ocorre cada uma dessas situações, conforme apresentados na Figura 06.

**Figura 06-** *Descrição das quatro fases da Teoria da Situação Didática*



**Fonte:** Pimentel (2024, p.6)

A partir do exposto, na figura 6, presentes nas dialéticas, percebemos que o aluno vivencia diretamente a construção do seu conhecimento. Assim, confirmamos a predileção da TSD às necessidades deste trabalho e que será necessária para o momento de análise de dados.

### ***Concepção e Análise a priori dos conceitos das Situações Didáticas***

Nessa seção, apresentaremos a aplicação da segunda fase da Engenharia Didática, na qual elaboramos e analisamos uma sequência de situações problema, as situações didáticas, que envolvem os conceitos basilares do triedro de Frenet. Para maior sistematização, assumiremos que uma situação problema envolve “a escolha de questões abertas ou fechadas numa situação matematizada ou menos matematizada, vinculada a um campo de problemas colocados em um ou vários domínios do saber” (Almouloud, 2007, p. 174).

Ainda no contexto dos saberes referenciados por Almouloud (2007, p. 174), é viável considerar situações “menos matematizadas” devido ao nível elementar da Matemática. Contudo, em nosso caso, o modelo matemático influencia de forma significativa todas as estratégias, ações e decisões dos aprendizes. De forma mais sucinta, o nosso campo epistêmico matemático, pertencente a um corpus teórico-formal, implica em fortes condicionantes derivados da própria construção/demonstração e descrição dos conceitos de TDF.

Para a elaboração das situações didáticas, consideraremos algumas características propostas por Almouloud (2007) para a estruturação das situações-problema, como a necessidade de contemplar um campo conceitual que desejamos explorar e a insuficiência dos conhecimentos prévios para a resolução completa do problema, que deve envolver múltiplos domínios do conhecimento.

Nesse contexto, é essencial distinguir e especificar os problemas que pretendemos explorar, bem como os domínios analíticos e gráfico-geométricos do Triedro de Frenet, reconhecendo que os saberes relacionados ao Cálculo de Várias Variáveis não serão suficientes para a solução. Além disso, buscamos que as situações apresentadas permitam adaptações por parte dos alunos, à medida que tomam decisões e as modificam (Brousseau, 1986, p. 440).

Além disso, como visamos descrever situações de ensino fundamentadas de uma Matemática procedente de nível avançado, nosso campo conceitual é condicionado, por vezes, por uma definição formal ou um teorema estruturante, esse fato, concomitante ao caráter de não trivialidade/abstracionismo dos conceitos de TDF, remete que as situações-problema requeiram conhecimentos suficientes da área para sua resolução, portanto, inferimos que a nossa abordagem deva ser determinante.

Por essa razão, utilizamos a visualização proporcionada pelos softwares como uma variável didática constante no cenário de aprendizagem dos estudantes. Além disso, alinhamos nossa abordagem com Almouloud (2007), ao enfatizar que “as atividades devem ser concebidas considerando os resultados dos estudos prévios”. (p. 174) Os objetivos incluem auxiliar os alunos na construção de conhecimentos de forma construtiva e significativa, além de desenvolver habilidades como a leitura e utilização das diferentes representações matemáticas e o raciocínio dedutivo. Assim, destacamos que “os objetivos da análise a priori devem determinar que as escolhas realizadas permitam o controle do comportamento dos alunos e seu significado” (Artigue, 1995, p. 45).

Desta forma, as escolhas e descrição de ações futuras, nessa seção, são fundamentadas em pressupostos teóricos, que devem permitir o controle didático da transposição didática e do sentido das ações futuras envolvendo a mediação de saberes. Ademais, em relação aos obstáculos epistemológicos, devam surgir em relação aos conhecimentos prévios das áreas de Geometria Analítica, Álgebra Linear e Cálculo de Várias Variáveis, desse modo, conhecimentos necessários para o entendimento do conteúdo, como derivadas parciais, produto vetorial, pois as questões desenvolvidas envolvem a discussão de teoremas e propriedades, e se caracterizam pelo uso do método de derivabilidade de funções de várias variáveis do CVV.

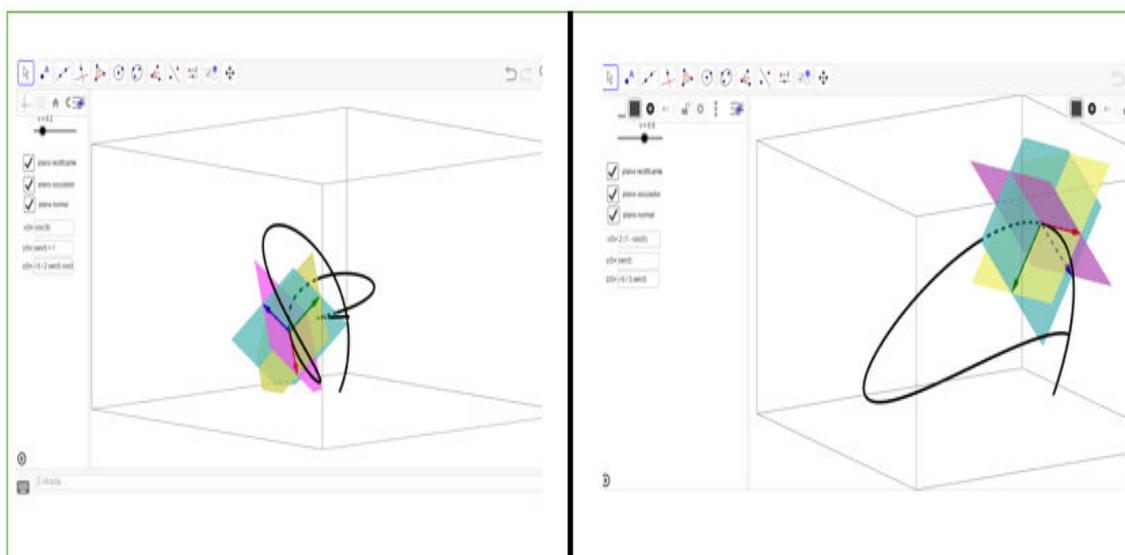
Situação-problema (1): Encontre por meio de uma correlação entre os vetores tangente, normal e binormal as fórmulas do Triedro de Frenet- TDF, e em seguida, desenvolva o significado geométrico do conceito torção. O participante da experimentação deve se basear nos conceitos prévios de álgebra linear e geometria analítica, alinhando-se à fundamentação teórica dos conceitos de Geometria Diferencial. Isso é essencial para estabelecer a relação entre os significados algébricos e geométricos dos vetores tangente, normal e binormal em curvas, a fim de encontrar as fórmulas do Triedro de Frenet.

Na formulação, o participante deve compreender que a relação  $T'(s) = k(s).N(s)$ , encontrada no triedro de Frenet permanece correta para curvas de dimensão três. Posteriormente, o participante deve articular a utilização das técnicas de derivação para determinar uma relação a partir do vetor binormal, normal.

Na validação, após a derivação do produto vetorial  $B(s) = T(s) \times N(s)$ , o participante encontrará  $B'(s) = T(s) \times N'(s)$ , e assim concluirá que  $B'(s)$  é ortogonal a  $T(s)$ . Ao mesmo tempo, irá perceber que, devido a norma do vetor  $B(s)$  ser unitária, que  $B'(s)$  é ortogonal a  $B(s)$ . Logo, ocorre que  $B'(s)$  encontra-se na mesma direção de  $N$ , diferindo de  $N$  por uma constante e sentido, coincidindo com a definição de torção.

Por fim, o participante deve empregar as duas expressões encontradas  $\begin{cases} T'(s) = k(s).N(s) \\ B'(s) = T(s) \times N'(s) \end{cases}$ , de modo articulado ao fato de que o vetor normal, pode ser expresso como  $N(s) = B(s) \times T(s)$ , empregando novamente a derivação do produto vetorial para encontrar que  $N'(s) = -\tau . B(s) - k(s). T(s)$ , encontrando assim as fórmulas do Triedro de Frenet-TDF. Na situação de institucionalização, finalmente, deve-se ter argumentos para se determinar uma analogia entre os conceitos geométrico de curvatura e torção para a curvas de dimensão três.

**Figura 7.** Explicação das curvas utilizadas na situação – problema (2) para a análise dos planos osculador, retificante e normal.



Fonte: Paiva (2019, p.120)

Situação-problema (2): Analise e efetue o cálculo da torção e curvatura da hélice circular cuja expressão é dada por  $\gamma(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$  em que,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Em seguida, correlacione e analise por meio do software Geogebra geometricamente o comportamento dos planos gerados a partir do Triedro Móvel de Frenet.

No que concerne a situação problema (2), ensaje que os participantes, na ação, se comprometam a efetuar o cálculo da torção e curvatura, e analisem o comportamento dos vetores tangente, normal e binormal, resultando dessa maneira na caracterização dos planos formados por meio desses vetores: osculador, retificante e normal.

Na formulação, os alunos devem verificar a natureza da curva proposta ( se a curva está parametrizada pelo comprimento do arco- ppca ou não encontram-se nessa forma), para desse modo empreguem a equação adequada para o cálculo da curvatura e torção, prosseguindo com a verificação por meio da simulação o comportamento de curvas de qualquer natureza em um espaço vetorial de dimensão três.

Na etapa posterior, a validação, o participante deve derivar a equação da curva, para assim, concluir que se trata de uma curva ppca. Em seguida, compreender que devido a natureza da curva, concluir que a primeira derivada da curva se refere a expressão do vetor tangente. O participante deve efetuar o cálculo da norma da expressão gerada por meio de uma segunda derivação da curva, encontrando a expressão da curvatura, e apartir disso, encontrar o valor do vetor normal.

Neste momento o participante deve realizar o produto vetorial entre os vetores tangente e normal para obter o vetor binormal, e por fim, encontrar o valor da torção. As expressões encontradas ao fim do raciocínio, devem ser  $\sigma = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$  e  $k = \frac{a}{a^2+b^2}$ .

Na segunda parte desta atividade, os participantes são solicitados a compreender apenas o significado geométrico dos conceitos envolvidos. Espera-se que, ao interpretar as curvas, eles consigam estabelecer uma associação entre a definição dos vetores e suas representações, além dos planos gerados por esses vetores. Por fim, na etapa de institucionalização, deve-se formalizar e sistematizar os argumentos para calcular o valor da curvatura, torção e dos vetores tangente, normal e binormal.

## Conclusão

Esta pesquisa apresentou uma abordagem epistemológica sobre o ensino do Triedro de Frenet (TDF), um tema abordado nas disciplinas de Cálculo de Várias Variáveis e Geometria Diferencial.

O objetivo foi propor uma situação didática utilizando o software GeoGebra para superar os obstáculos epistemológicos, como a abstração e a complexidade dos conceitos de TDF. Ao longo do estudo, descrevemos e exemplificamos diversos conceitos, proporcionando aos alunos uma forma diferenciada de explicação e visualização, relacionando definições matemáticas ao seu significado geométrico. Inicialmente, exploramos a curvatura em curvas planas, conectando-a aos vetores tangente e normal.

Em seguida, introduzimos o conceito de torção, discutindo sua relação com o vetor binormal e a formação do TDF. Os vetores do TDF definem planos normais, retificantes e osculadores, permitindo a derivação de equações relevantes.

A metodologia da Engenharia Didática (ED) favoreceu uma compreensão aprofundada dos conceitos discutidos. A pesquisa enfatizou a necessidade de um aporte teórico e metodológico para elaborar situações-problema que abordassem esses conceitos.

Ao final, buscamos contribuir para detalhar e discutir o ensino do TDF, considerando a escassez de estudos na área, tanto no contexto nacional quanto internacional.

### Referências

- Almouloud, A. S. (2007) *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR.
- Alves, F. R. V. (2016a). Engenharia didática (análises preliminares e análise a priori): o caso das equações diferenciais de segunda ordem. *Revista ENCITEC*, v. 6, n. 2, 1-22.

- Alves, F. R. V. (2016b). Didática de matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. *Revista Interfaces da Educação*, v. 7, n. 21, 131-150. <https://doaj.org/article/e617dd79ca4740de81bebc71909fc5f3>
- Alves, F. R. V. (2018). Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos Números (Generalizados) de Catalan (NGC) Didactical Engineering: about the teaching of generalized Catalan numbers. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, [S.l.], V. 20, N.2.ISSN 1983-3156. <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/36808>
- Alves, F. R. V.; Catarino, P. M. M. C. (2018). Engenharia Didática de Formação (EDF): Repercussões para a formação do professor de matemática no Brasil. *Educação Matemática em Revista - RS*, v. 2, n. 18.
- Artigue, M. (2021). Méthodologies de recherche en didactique des mathématiques : Où en sommes-nous? *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, São Paulo, v. 22, n. 3, p. 25–64, DOI: 10.23925/1983-3156.2020v22i3p025-064. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/51906>
- Artigue, M.; Almouloud, S. A.; dos Santos, M. A.; Pereira, S. F. M. (2024). Epistemologia e didática. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, São Paulo, DOI: 10.23925/1983-3156.2024v26i4p353-388. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/69577>
- Batista, P. C. da S., Barreto, M. C., De Sousa, A. C. G. (2021). Teoria das situações didáticas presentes na prática pedagógica em matemática a partir da formação e reflexão

- docente. *Revista Debates em Educação*, DOI: 10.28998/2175-6600.2021v13n31p577-602. <https://www.seer.ufal.br/index.php/debateseducacao/article/view/10606>.
- Bacherlard, G.(1995). *A formação do espírito científico*. São Paulo: Contra-Ponto.
- Barquero, B; & Bosch, M. (2015). *Didactic Engineering as a Research Methodology: From Fundamental Situations to Study and Research Paths*. In: Watson, A.; Ohtani, Minoru. *Task Design In Mathematics Education*. ICMI study 22, New York: Springer, 251 – 270.
- Brousseau, G. (1986). *Théorisation de phénomènes d'enseignement des mathématiques*. [Tese de Doutorado] I. 905f. Université de Bordeaux . Bordeaux- França .
- Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. Apresentação de Benedito Antônio da Silva. São Paulo: Ática.
- Douady, R. (2008). Géométrie, graphiques, fonctions au collège. *Revista Eletrónica de investigación en educación e ciencias*. N.1, 1-7.
- Gorodski, C. (2002). Alguns aspectos do desenvolvimento da geometria, <http://www.ime.usp.br/gorodski/os/>
- Paiva, A. C. P. & Alves, F. R V. (2018). Utilização do Geogebra como auxílio no ensino de curvatura de curvas planas e espaciais. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*. v.7(n. 2) ISSN 2237-9657, , p. 65-79.
- Paiva, A. C. P. (2019). Engenharia Didática sobre o estudo e ensino de conceitos de Geometria Diferencial: Descrição de Situações Didáticas com a utilização do software Geogebra. [Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática]. Instituto Federal de Educação, Ciência e tecnologia do Ceará – IFCE. Fortaleza- CE. [https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=7778649](https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=7778649)

- Paiva, A. C. P. & Alves, F. R. V. (2023). *Engenharia Didática para o ensino de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem: análises preliminares e a priori com a utilização do software Geogebra*. In: [I Congresso GeoGebra Pernambuco] - UFPE - Recife, 2023. <https://www.doity.com.br/anais/iconegrossoegegebrape/trabalho/311977>
- Pimentel Paiva, A. C. (2024). Explorando o Ensino de Geometria Diferencial: Uma Análise do Livro de Keti Tenenblat. *Revista Ensino em Debate*, v. 3.
- Pommer, W. M. (2013). A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. *Revista São Paulo: [sn]*.
- Zucker Steven, W. (2005). *Differential Geometry from the Frenet Point of View: Boundary Detection, Stereo, Texture and Color*. In: [Mathematical Models of Computer Vision: The Handbook Nikos Paragios], Yunmei Chen and Olivier Faugeras (eds.), Springer, 2005. [http://www.cs.yale.edu/homes/vision/zucker/papers/Zucker05\\_DiffGeometry.pdf](http://www.cs.yale.edu/homes/vision/zucker/papers/Zucker05_DiffGeometry.pdf)