Intuición y razonamiento matemático en Didáctica de las Matemáticas

Intuition and mathematical reasoning in Didactics of Mathematics

Renata Teófilo de Sousa[1]

Francisco Régis Vieira Alves[2]

Helena Maria Barros de Campos[3]

Resumen

Este trabajo discute sobre la teórica de la intuición y el razonamiento matemático desde la perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas, y dilucida las posibilidades de manifestación de diferentes niveles de razonamiento intuitivo, las posibilidades de su identificación y contribución al área educativa. El objetivo del artículo es valorar la posibilidad de integración entre intuición y razonamiento matemático, buscando mejorar la perspectiva de enseñanza práctica, considerando la influencia de la intuición en la construcción del razonamiento matemático y en su aprendizaje. La metodología utilizada fue la investigación bibliográfica de carácter básico y exploratorio, a partir del análisis de obras que abordan la intuición y el razonamiento matemático en sus diferentes niveles. Como resultado, proponemos una discusión que relaciona los niveles de razonamiento dentro de la Teoría de las Situaciones Didácticas, desde la perspectiva de Brousseau y Gibel (2005) y la categorización de la intuición presentada por Efraim Fischbein (1987), buscando similitudes y convergencias entre estos estudios. Finalmente, se refuerza que en Matemáticas es importante desarrollar en los estudiantes la capacidad de distinguir entre

[1] Máster en Enseñanza de Ciencias y Matemáticas en el Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología de Ceará, Profesora de la Secretaría de Educación Básica del Estado de Ceará, Brasil. E-Mail: rtsnaty@gmail.com ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5507-2691

[2] Doctorado en Educación en la Universidad Federal de Ceará, Beca de Productividad CNPq - PQ2. Profesor titular del Programa de Posgrado en Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas del Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología de Ceará. E-Mail: fregis@ifce.edu.br ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3710-1561

[3] Doctorado en Matemáticas, con Especialización en Topología y Geometría por la UNED - Madrid (España). Investigadora del Centro de Investigación en Didáctica y Tecnología en la Formación de Formadores del CIDTFF (Universidad de Aveiro). Profesora asistente en el Departamento de Matemáticas de la UTAD, Portugal. E-Mail: hcampos@utad.pt ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2767-0998

Fecha de recepción: 05/05/2023 Fecha de aceptación: 20/11/2023

Creative Commons Atribución 4.0

percepción, sentimientos intuitivos, creencias intuitivas y convicciones formalmente sostenidas, desarrollando interpretaciones adecuadas en el campo de la intuición, junto con la evolución de estructuras formales de razonamiento.

Palabras clave: Didáctica de las Matemáticas, Razonamiento matemático, Intuición, Teoría de las Situaciones Didácticas

Abstract

This work brings a theoretical discussion on intuition and mathematical reasoning from the perspective of the Didactics of Mathematics, in addition to elucidating the possibilities of manifestation of different levels of intuitive reasoning, aiming at the possibilities of its identification and contribution to the educational area. The objective of this article is to present the possibility of integration between intuition and mathematical reasoning, seeking to improve the teaching perspective for its practice, considering the influence of intuition in the construction of mathematical reasoning and in its learning. The methodology used was bibliographic research of a basic and exploratory nature, based on the analysis of works that address intuition and mathematical reasoning at different levels. As a result, we propose a discussion that relates the levels of reasoning within the Theory of Didactic Situations, from the perspective of Brousseau and Gibel (2005) and the categorization of intuition presented by Efraim Fischbein (1987), looking for similarities and convergences between these studies. Finally, it is reinforced that in Mathematics it is important to develop in students the ability to distinguish between perception, intuitive feelings, intuitive beliefs and formally held convictions, developing adequate interpretations in the field of intuition, along with the evolution of formal reasoning structures.

Keywords: Didactics of Mathematics, Mathematical reasoning, Intuition, Theory of Didactic Situations.

Introducción

La Didáctica de las Matemáticas (DM) surgió a fines de la década de 1960, en medio de un escenario de reflexión sobre cambios paradigmáticos en el sistema de enseñanza en Francia, en el que varios especialistas del campo educativo trajeron discusiones a partir de un análisis profundo de la praxis docente y el aprendizaje de los estudiantes en Matemáticas. Tales reflexiones surgieron de la necesidad de una mejor comprensión de los elementos que intervienen en el sistema didáctico, ilustrado por el trinomio docente-alumno-saber (Brousseau, 1986), en busca de mejoras en la enseñanza de este campo del saber.

De este modo, la DM tiene su génesis marcada por un escenario de reforma educativa posterior al Movimiento de Matemáticas Modernas (MMM) y la creación de los *Institut Universitaire de Recherche L´enseignement des Mathématiques* (IREMs). Estos institutos tuvieron el papel de apoyar la reforma, posibilitando la interacción entre profesores de matemáticas de secundaria e investigadores académicos, promoviendo un acercamiento entre los temas de investigación y los temas de enseñanza (Margolinas, 2005).

Así, la DM se configura en una línea de investigación con muchas particularidades que, luego de exhaustivos estudios, trajo fuertes aportes al campo educativo. Entre estos, podemos mencionar la creación de teorías, metodologías e investigaciones, como la noción de Contrato Didáctico y la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1976; 1986), Ingeniería Didáctica (Artigue, 1988), el concepto de Obstáculo Epistemológico y Obstáculo Didáctico (Bachelard, 1996), Transposición Didáctica (Chevallard, 1991), entre otros estudios pormenorizados.

Bajo otro enfoque, varios autores discuten la intuición como facultad ontológica y las posibilidades de interpretarla, tanto en el ámbito educativo como en la Psicología Cognitiva. En el caso de este trabajo, buscamos aspectos de convergencia o semejanza, estrictamente centrados en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) y los diferentes niveles de razonamiento matemático a su paso (Brousseau y Gibel, 2005), y las Categorías del Razonamiento Intuitivo (Fischbein, 1987), con respecto a una clasificación de la intuición en matemáticas. Este artículo busca fundamentar la posibilidad de articulación entre estas teorías y su influencia en la elaboración del pensamiento matemático por parte del estudiante.

Según Brousseau (1976), en el ámbito de la enseñanza debemos considerar el componente heurístico intrínseco a la intuición, sugiere que la demostración relativa a los algoritmos matemáticos puede realizarse mediante intuiciones que jugarán un pequeño papel en estos algoritmos. Así, refuerza que “estas intuiciones pueden ser racionalizadas localmente, cuando la implementación de una teoría ya constituida proporcionará la demostración pretendida o parte de ella” (p. 102). De esta forma, la elección de teorías o estructuras, guiada por heurísticas, puede, a posteriori, evocar una intuición para justificar el enfoque seguido.

Fischbein (1992, 1993) refuerza la importancia de conocer las diferentes formas en que los estudiantes resuelven diferentes tipos de problemas, así como los obstáculos encontrados, su origen y los errores sistemáticos que cometen, en un intento por comprender aspectos del pensamiento intuitivo en matemáticas y su evolución, Fischbein (1987) propone un sesgo teórico que engloba el campo de la intuición. El autor “identifica y organiza resultados experimentales relacionados con la intuición, así como revela sus implicaciones en el campo educativo, desarrollado para la ciencia y difundido en una amplia variedad de contextos de investigación y educación matemática” (Sousa, 2022, p. 109), además de categorizar las intuiciones según sus diferentes tipos de manifestación.

En una línea de pensamiento paralela a Fischbein (1987), Brousseau y Gibel (2005) discuten ciertas nociones referentes a la naturaleza del razonamiento matemático, teniendo en cuenta la intuición articulada a estas nociones en el curso de TSD. En otras palabras, Brousseau y Gibel (2005) aclaran que la función del razonamiento cambia durante las etapas de la TSD en el desarrollo de la situación didáctica. De esta forma, existe una preocupación por la intuición y la construcción del razonamiento matemático, así como su relación con el proceso de aprendizaje en Matemáticas a partir de la creación de estructuras cognitivas organizadas.

Este trabajo pretende establecer un vínculo entre la intuición y el razonamiento matemático, desde la perspectiva de las Categorías del Razonamiento Intuitivo y la Teoría de las Situaciones Didácticas, como posibilidad de mejorar la perspectiva docente para su práctica, considerando la influencia y las diferentes formas de la manifestación de la intuición en el aprendizaje de las matemáticas.

Para ello, utilizamos pesquisa bibliográfica cualitativa, de carácter básico, estructurando una discusión a partir de las obras enumeradas. Según Moreira y Rizatti (2020), este modelo de investigación tiene como objetivo la producción de conocimiento fundamental, que busca componer una base teórica consistente, sobre la cual se puedan desarrollar futuras investigaciones, dada la comprensión de los procesos humanos y naturales básicos, en esta investigación presenta un análisis de ideas que convergen a una visión sobre los niveles de razonamiento matemático e intuición en las matemáticas, así como sus aportes a la enseñanza.

Dicho esto, discutimos la articulación entre tales niveles de razonamiento e intuición, a través del prisma de la Didáctica de las Matemáticas y la Psicología Cognitiva, tal como se presenta en las siguientes secciones.

Desarrollo

Teoría de las Situaciones Didácticas

La Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), según Brousseau (1976) propone una comprensión de la relación que se establece entre el docente, el alumno y el conocimiento, así como el ambiente (*milieu*) en el que se produce la coyuntura de una determinada situación didáctica. Partiendo de esta premisa, en el TSD, la tarea o atribución que realiza el estudiante es similar a la labor de un investigador, en la que este estudiante, a través de un conjunto de dialécticas, se desarrolla, haciéndose capaz de formular hipótesis, teorías y conceptos, así como el docente brinda situaciones favorables para que este alumno, al actuar, transforme la información brindada en conocimiento para sí mismo.

Brousseau (1986, 1996) propone lo que llamamos un triángulo didáctico, en el que sus vértices son considerados los pilares de la relación docente, alumno y conocimiento, que es una relación dinámica y compleja. Para que estas relaciones sean productivas, debemos considerar un medio minuciosamente elaborado por el profesor, con el objetivo de incentivar al estudiante en su búsqueda de conocimiento, en la medida que se adapta a las situaciones. Brousseau (1986) explica que el aprendizaje de los estudiantes se da a partir de su adaptación a un medio que genera contradicciones, dificultades y desequilibrios, haciendo un paralelismo con la sociedad humana y se manifiesta a través de nuevas respuestas, que a su vez proporcionan evidencias del aprendizaje.

Por lo tanto, el milieu indica el ambiente didáctico, un sistema antagónico, sin intención didáctica explícita ajena al alumno, que puede incluir, entre otros, situaciones problema, juegos, el saber de los compañeros y del profesor (Brousseau, 1986). Muestra que “si el entorno reacciona con cierta regularidad, el sujeto puede relacionar alguna información con sus decisiones (feedback), anticipar sus respuestas y considerarlas en sus decisiones futuras”

(Brousseau, 2008, p. 21). En efecto, la expresión situaciones didácticas se refiere a los modelos que describen las relaciones de actividades entre alumno, profesor y *milieu*.

De esta forma, según Gibel (2015), las situaciones escogidas o elaboradas por el docente, con el objetivo de promover el aprendizaje del conocimiento, son decisivas en cuanto a potenciar la capacidad de organización y desarrollo del estudiante, frente al medio de comunicación. La concepción, organización y planificación de una situación didáctica en sí requiere etapas en las que el alumno se encuentra solo frente al problema y busca solucionarlo sin la intervención directa del profesor (Brousseau, 1986; 2008). Esta situación, denominada situación adidáctica, tiene como objetivo que el alumno busque resolver una situación basándose únicamente en sus conocimientos previos.

Cabe señalar que las situaciones adidácticas están diseñadas para que convivan con las situaciones didácticas, caracterizando y obedeciendo a un proceso didáctico predeterminado por objetivos, métodos, recursos y conceptos. Partiendo de esta premisa, el estudiante es consciente de que la situación problema fue elegida para incentivarlo a adquirir nuevos conocimientos. Sin embargo, este conocimiento está plenamente justificado por la lógica interna de la situación y que posiblemente demande razones didácticas para construirlo (Brousseau, 2008).

Por lo tanto, la concepción de una situación didáctica incluye la elaboración de circunstancias favorables para que el alumno, de hecho, desarrolle sus habilidades y construya conocimientos. Fomentar la cooperación entre estudiantes y docentes desarrolla habilidades importantes para la aprehensión del conocimiento, además de promover la integración de la clase. Para que tales relaciones sean beneficiosas, Brousseau (1996) enfatiza que deben ser establecidas por lo que él llama el contrato didáctico, que consiste en un conjunto recíproco de conductas esperadas en la relación profesor-alumno, mediadas por el conocimiento.

La TSD organiza el proceso de aprendizaje del alumno a partir de las llamadas situaciones dialécticas –acción, formulación, validación e institucionalización–, en que las tres primeras conforman la *situación adidáctica*. Sintetizamos a continuación estas dialécticas, según las ideas de Brousseau:

i) Dialéctica de acción: el estudiante se enfrenta al problema y, en posesión de él, busca en sus conocimientos previos y en su interacción con el entorno, elementos que le ayuden en la búsqueda de un camino a seguir hasta la supuesta solución del problema propuesto.

ii) Dialéctica de formulación: hay un intercambio de informaciónes entre el alumno y el medio. Es el momento de exponer las ideas de forma clara y verbalizada, pero sin la obligación de utilizar un lenguaje matemático riguroso y/o formalizado. De esta forma, el alumno perfila estrategias y comienza a apropiarse de conocimientos.

iii) Dialéctica de validación: el estudiante presenta su estrategia de solución a los demás involucrados y trata de argumentar con base en su razonamiento, verificando si lo que conjeturó es, de hecho, válido. Así, la validación es la etapa en la que se busca persuadir a los oyentes sobre la veracidad, o no, de los argumentos presentados. A partir de este punto, es importante buscar el uso de un lenguaje y mecanismos de prueba más formalizados.

iv) Dialéctica de institucionalización: en esta fase interviene la figura del docente para realizar una síntesis de lo expuesto y discutido por los estudiantes en las etapas anteriores, de manera formal y con lenguaje matemática adecuado, eliminando modelos contradictorios o inadecuados que hayan surgido en las etapas anteriores.

La institucionalización, en particular, define las relaciones que pueden establecerse entre la libre conducta o producción del estudiante, el conocimiento cultural o científico y el proyecto didáctico, proporcionando una forma de leer o interpretar estas actividades, otorgándoles un estatuto de sentido, como se explica en el diagrama (Figura 1):

Figura 1

Relación entre saber y conocimiento.

Nota. Diagrama sobre la relación entre saber y conocimiento. Adaptado de Margolinas (2015).

Según el autor, la institucionalización, por su parte, se muestra como parte integrante de la transformación del conocimiento - simple familiaridad, pero no intimidad con el objeto de estúdio - en saber -intelectual, que admite conceptos y juicios sobre él-, a través del proceso de devolución, que se da a lo largo de la situación didáctica (Margolinas, 2015). Así, la intención de enseñar representa buscar transmitir el saber, es decir, generar conocimiento a partir de la situación.

Alves (2019) señala que las dialécticas antes mencionadas demandan un detallado y cuidadoso expediente de atención y análisis, pues nos interesa la perspectiva y comprensión de la acción docente, mediada y sustentada en fundamentos que subsidian e indican la adopción de una metodología para la enseñanza de las Matemáticas.

Razonamiento matemático en el camino de la TSD

Para la discusión de esta sección, nos basamos en el trabajo de Brousseau y Gibel (2005), como una forma de traer una discusión sobre el curso del razonamiento matemático dentro del desarrollo de las dialécticas de la TSD. Durante mucho tiempo se consideró que, en Matemáticas, el razonamiento debía concebirse como una presentación de demostraciones modelo, enseñadas por el profesor y reproducidas fielmente por los alumnos. Sin embargo, para los profesores de hoy, así como para los psicólogos, “el razonamiento como actividad mental no es una simple recitación de una prueba memorizada” (Brousseau y Gibel, 2005, p. 14).

Pretz et al. (2003) explican que, ante cualquier tipo de situación problema, el sujeto aporta a la tarea su experiencia con situaciones similares, como el conocimiento sobre el dominio y las expectativas individuales o intuiciones sobre cómo abordar el problema. En este sentido, la implementación de tales situaciones problemáticas está plagada de una serie de dificultades.

Brousseau y Gibel (2005) señalan que, en esta situación, el alumno está sujeto a una mayor incertidumbre frente a cuestiones muy heterogéneas, mientras que el docente necesita analizar, evaluar y tomar decisiones rápidas sobre comportamientos impredecibles del alumno, que también pueden ser difíciles de explicar o utilizar, lo que hace más compleja la evaluación del aprendizaje de los estudiantes.

De esta manera, para construir un modelo de razonamiento matemático de un sujeto a partir de la noción de situación, es necesario entender que el razonamiento atañe a un dominio que no se restringe a las estructuras formales, lógicas o matemáticas del razonamiento, aunque esté constituido por un conjunto ordenado de enunciados conectados, combinados u opuestos entre sí, respetando ciertas restricciones que pueden explicitarse en la solución de un problema, o incluso, como explican Brousseau y Gibel (2005):

> Por tanto, para afirmar que cierto comportamiento observable es signo de un razonamiento cuyos elementos son, en su mayor parte, implícitos, es necesario ir más allá de la definición formal y examinar las condiciones bajo las cuales puede considerarse un "razonamiento presunto" como un "razonamiento real". (p. 16)

Sin embargo, Brousseau y Gibel (2005) refuerzan que, en varias ocasiones, el docente orienta su interpretación respecto de las aseveraciones de los alumnos, buscando adaptarlas de manera conveniente e inducida al tema tratado en clase, más que de acuerdo a las preferencias o intenciones iniciales del alumno. Por consiguiente, los modelos inadecuados creados por el alumno son a menudo interpretados por el profesor como una incapacidad para razonar (Brousseau, 1996). Sin embargo, debemos considerar que los estudiantes en ocasiones utilizan representaciones o conocimientos diferentes a los que pretendemos enseñarles, lo que puede ser resultado de la lógica de los niños, del pensamiento natural. En este sentido, la situación didáctica:

> ... no puede reducirse ni a la acción del sujeto ni al conocimiento que la motiva, sino que es el conjunto de circunstancias el que crea una relación racional entre ambos. La situación puede explicar por qué se produjo un falso razonamiento apuntando a causas distintas a un error o insuficiencia del conocimiento del sujeto. (Brousseau y Gibel, 2005, p. 17)

De esta forma, es importante, según la línea de pensamiento de los autores, comprender que el alumno y el docente producen razonamientos matemáticos en diferentes niveles. El docente, al contar ya con un bagaje de conocimientos más robusto, ante una situación, actuará de manera diferente al alumno, que posiblemente tiene un número limitado de experiencias y conocimientos previos.

Según Brousseau (1997), el razonamiento puede caracterizarse por el papel que desempeña en una situación, es decir, por su función en esa situación. De este modo, tal función puede ser decidir sobre algo, informar, convencer o explicar. Desde esta perspectiva, la función del razonamiento varía según el tipo de situación en que se presente, teniendo una relación directa con el movimiento dialéctico dentro de la TSD, es decir, si se trata de una situación de acción, formulación o validación.

En Brousseau y Gibel (2005), los autores buscan distinguir los niveles de razonamiento matemático, considerados más o menos degenerados, y que se adaptan a diferentes tipos de situaciones en TSD, como se resume a continuación:

i) Razonamiento de nivel 1 (N1): puede caracterizarse por un tipo de razonamiento que no se formula como tal, sin embargo puede ser atribuido al sujeto a partir de sus acciones, y construido como modelo de esa acción, siendo considerado como un modelo implícito relacionado con la situación de acción en el TSD.

ii) Razonamiento de nivel 2 (N2): puede considerarse como un razonamiento incompleto desde el punto de vista formal, pero con lagunas que pueden ser, implícitamente, rellenadas por la actuación del alumno en una situación en la que no se justificaría una formulación completa. Este tipo de razonamiento aparece en situaciones donde la comunicación es necesaria, estando relacionado con la fase de formulación.

iii) Razonamiento de nivel 3 (N3): puede definirse como un razonamiento formal, global y concluido, basado en un conjunto de inferencias correctamente relacionadas, que hacen una mención clara de los elementos de la situación o conocimiento considerados como compartidos por la clase, aunque aún no se postula que el razonamiento es absolutamente correcto. El razonamiento a este nivel es característico de las situaciones de validación.

Como plantean Brousseau y Gibel (2005), el problema que se le presenta al estudiante exige soluciones o pruebas cuya validación pueda darse independientemente de las circunstancias didácticas en las que se planteó el problema. “La solución estándar, es decir, una solución que podría producir el profesor y que se espera del alumno, tiene la forma de una secuencia de inferencias (y cálculos), que está correctamente conectada, es decir, según reglas de lógica" (p. 19). De esto, podemos considerar que cada etapa del razonamiento se incorpora a justificaciones lógicas y matemáticas consideradas estándar, en las que su validez y pertinencia parecen ser autónomas.

Sin embargo, Gibel (2015) señala que “el estudiante en una situación de aprendizaje es llevado a producir formulaciones de métodos generales y a cuestionar la validez de cada uno de ellos” (p. 11). En este caso, las situaciones de formulación y validación están íntimamente relacionadas, dado que el estudio de la validez de un método se basa en la habilidad de los estudiantes para construir un contraejemplo.

Por tanto, en la propuesta de los autores, la interpretación de las soluciones de los estudiantes debe tener en cuenta un sistema más amplio y complejo, si la intención del profesor es desafiarles, instigarles o incluso explicar por qué tales formas de razonamiento, correctas o no, fueron producidos. Mientras tanto, se recomienda que el docente considere los conocimientos previos del estudiante para construir su razonamiento en una situación objetiva, porque:

> Se aprende un nuevo razonamiento cuando se promueve desde una forma particular de resolver un problema determinado a una forma "universal" de resolver todos los problemas de un tipo determinado, y se integra como tal con el conocimiento del sujeto. En una situación autónoma, el razonamiento se basa en la inducción, pero esta inducción se apoya en una cadena de inferencias que se pueden hacer explícitas. (Brousseau y Gibel, 2005, p. 21)

Sin embargo, a medida que se amplía el repertorio de nuevos conocimientos por aprender, se hace cada vez más inviable percibir el creciente número de conexiones circunstanciales independientes y existe un riesgo considerable de confusión (Brousseau, 1976;

Brousseau y Gibel, 2005). En este sentido, los autores consideran que el razonamiento del estudiante es amplio, el cual depende de muchas variables, incluyendo lo que traen en su bagaje de conocimientos previos.

De esta forma, comprendemos las razones por las que los docentes recurren en ocasiones a motivos didácticos, estableciendo conexiones artificiales entre distintos tipos de saberes, ajenos al sentido científico de estos saberes, como el uso de revisiones, recursos mnemotécnicos y metáforas, metonimias, analogías, lo que se llama por medio retórico de la didáctica (Brousseau, 1986; Brousseau y Gibel, 2005; Gibel, 2015). Esto suele ocurrir cuando los estudiantes son incapaces de producir un razonamiento lo suficientemente claro y coherente para la solución de un problema. Alves y Acioly-Régnier (2021) traen una inquietud complementaria:

> [...] cuando miramos el trabajo de los profesores de Matemática, sobre todo el trabajo de los más experimentados (*experts*), podemos ver que ciertas rutinas y guiones de acción y ejecución tienden o se dirigen hacia un proceso de simplificación, optimización, estilo profesional lacónico e, incluso, de economía o acortamiento de las acciones, no pocas veces, su envejecimiento también. (p. 14)

Con base en lo anterior, entendemos que, a nivel teórico, no existen condiciones para que el conocimiento desarrollado en una situación didáctica autónoma en el aula tenga las mismas propiedades que el conocimiento desarrollado culturalmente, dado que su aprendizaje requiere ser apoyado en acciones didácticas específicas.

La intuición en las matemáticas

La relación entre intuición y creación proviene de la capacidad del individuo para realizar asociaciones a partir de la observación y captura de *insights*. Y en ese sentido, la intuición se procesa a nivel subjetivo, pues es necesario dejarse llevar por el sentimiento que se produce de manera inconsciente, pero de alguna manera ligada a las experiencias previas del sujeto.

Gamoneda y González (2018) traen una discusión sobre lo que denominan *epifanía creativa*, dilucidando un campo general que circunscribe el epifenómeno, que no es más que u7n fenómeno accidental que acompaña a otro, sobre el cual no tiene influencia; la conciencia considerada solo como un elemento accesorio, sin la capacidad de determinar el comportamiento humano (Diccionario Michaelis, 2022).

Dentro de este campo, los autores consideraron la conceptualización y distinción entre intuición, descubrimiento, invención, iluminación, epifanía, eureka y serendipia, considerando la exploración de los efectos (inmateriales) de un pensamiento repentino, entendido como la emergencia del no consciente en la diacronía lógica del pensamiento.

Varios académicos en el campo de la Psicología buscan explicar la intuición a partir de una gama de fenómenos, incluyendo la heurística (Epstein, 1994), la pericia (Blattberg y Hoch, 1990) y el procesamiento de información inconsciente (Epstein, 1994; Lieberman, 2000). Buscamos aquí en este trabajo, a partir de estos y otros fenómenos, relacionarlo con el contexto de las Matemáticas.

Sin embargo, es importante resaltar la diferencia entre intuición y insight o fenómeno "Eureka" (Schooler y Melcher, 1995). A diferencia de la intuición, el insight es el resultado de un largo proceso, que comienza con el pensamiento analítico y precede al período de incubación. De esta manera, cuando se produce una solución a través de la intuición, el estudiante de repente se da cuenta de las relaciones lógicas entre el problema y su solución (Alves, 2012; Lieberman, 2000).

Sobre la intuición y la creación en matemáticas, Poincaré (1899, 1900, 1904, 1908) y Hadamard (1945) fueron los grandes nombres en el área, con trabajos que brindan un amplio estudio sobre cómo funciona la intuición en el trabajo creativo. En cuanto a la intuición como facultad cognitiva, Poincaré (1904) no la considera empírica de hecho, sino el producto de una experiencia racional y que, a partir de ella, posibilita la creación matemática a través de un proceso de inducción. También señala que "toda verdad particular puede extenderse de infinidad de formas, pero solo la analogía puede guiarnos a través de las mejores elecciones" (Poincaré, 1904, p. 91-92).

Poincaré y Hadamard argumentan, en definitiva, que la intuición se produce como una forma de iluminación súbita, inconsciente, pero después de un arduo trabajo, siendo esencial para la invención/creación del pensamiento científico, presentando varios ejemplos. Poincaré (1908) considera que los procesos inconscientes y subconscientes son capaces de generar soluciones repentinas (insights o esclarecimientos) de problemas que aún no habían sido resueltos durante las fases del esfuerzo consciente.

Otte (1997), apoyándose en los principios de la epistemología kantiana, aporta una mirada sobre la construcción de conceptos y la forma en que se aplica la intuición a los mismos. El autor cree que las matemáticas se basan en conceptos que, a su vez, están dados por definiciones y que la cognición matemática se origina en la construcción de conceptos. Y en ese sentido, señala que:

> … en el mundo de los fenómenos hay dos elementos: la forma de la intuición (espacio y tiempo) y la materia o contenido, lo que se presenta en el espacio y el tiempo. Somos capaces de construir conceptos matemáticos a priori "en la medida en que somos nosotros mismos los creadores de los objetos de los conceptos en el espacio y el tiempo. (p. 334)

En el campo educativo, centrado en el aprendizaje de las matemáticas, la intuición ha sido objeto de discusiones a lo largo del tiempo en el campo de la Psicología Cognitiva y la Educación Matemática (Pais, 1996; Kidron, 2011; Grande y Silva, 2013; Alves y Borges Neto, 2011; Alves, 2016). Aquí podemos decir que la intuición se refiere a un producto de las representaciones que se hacen de la realidad y, en ese sentido, tiene un papel auxiliar pero significativo en el proceso de aprendizaje de los alumnos, que puede ser tomado en cuenta por el docente.

Con respecto al campo de las Matemáticas, Fischbein (1987) afirma que el aprendizaje de una definición o demostración formal no determina de manera absoluta la forma en que un estudiante la entiende y la utiliza y, por tanto, “obstáculos para la comprensión, errores y estratégias de solución inadecuadas son, a menudo, el efecto de influencias intuitivas” (Fischbein, 1987, p. 49).

Partiendo de esta premisa, el autor profundiza sus estudios sobre la intuición como facultad ontológica, clasificando estas influencias cognitivas en categorías, abordadas en el siguiente apartado.

Categorías del Razonamiento Intuitivo

Para Fischbein (1987), el curso del razonamiento de un estudiante sobre un nuevo tema parte de la intuición y, con base en sus percepciones, este estudiante llega a conjeturar sus ideas, estandarizándolas en una línea de razonamiento que tiene significado para él. En cuanto a la intuición, el mismo autor señala que significa esencialmente una valoración global, sintética, no explícitamente justificada o predictiva. Tal cognición global es sentida por un sujeto como evidente, autoconsistente y duramente cuestionable.

Fischbein (1999) detalla cuidadosamente el sentido característico de algunos procesos de razonamiento intuitivo, que se relacionan con el proceso de creación del pensamiento matemático. Alves (2016) resume una explicación que identifica tal razonamiento:

- (i) Cogniciones evidentes: significa que las intuiciones son aceptadas sin que el individuo exprese la necesidad de verificación/verificación o prueba a posteriori;

- (ii) Convicción intrínseca: se refiere a una cognición intuitiva (de carácter privado) generalmente asociada al sentimiento de certeza, convicción de seguridad;

- (iii) Sentido coercitivo: que la intuición manifiesta un 'efecto coercitivo' en el sentido de afectar las estrategias de razonamiento del individuo y su selección de hipótesis y soluciones. Esto significa que el individuo tiende a rechazar/negar interpretaciones alternativas de otros, que contradicen sus intuiciones privadas y momentáneas;

- (iv) Carácter de globalidad: finalmente, el autor describe una característica básica entre el razonamiento intuitivo y el razonamiento lógico, distinguimos el carácter de globalidad, es decir, las intuiciones son cogniciones globales en contraposición a las cogniciones adquiridas a través de secuencias inferenciales (como: Si cuenta... Entonces...) y lógico o analítico-inferencial. (p. 65).

En base a esta explicación, podemos inferir que, en lo que respecta a las Matemáticas, existen enunciados de hecho que son aparentemente aceptables de manera simple y directa, con cierta naturalidad, mientras que en otros casos es necesaria una demostración o prueba lógica formal para su aceptación cómo ocurre la verdad. De esta forma, Fischbein (1999) divide las cogniciones intelectuales en dos tipos: (i) las cogniciones intuitivas, consideradas directamente aceptables/evidentes por sí mismas, y; (ii) cogniciones lógicas, aceptadas indirectamente sobre la base de pruebas lógicas/explícitas.

En cuanto a la categorización de la intuición, Fischbein (1987) discute la articulación existente entre los diferentes tipos de intuición y su relación con la solución de problemas, separándolas en lo que clasifica como Categorías del Razonamiento Intuitivo, que son, desde la perspectiva del autor: intuiciones afirmativas, intuiciones conjeturales, intuiciones anticipatorias y concluyentes descritas brevemente en los párrafos siguientes.

La primera de las categorías se refiere a las *intuiciones afirmativas*. Estos se refieren a representaciones, interpretaciones o entendimientos aceptados directamente por los seres humanos como verdades naturales, de manera evidente e intrínsecamente significativa (Fischbein, 1987; Sousa, 2022). Por ejemplo, si alguien le preguntara a un estudiante qué es una línea recta, muy probablemente ese estudiante intentaría dibujar una línea recta o mostraría algún ejemplo de una línea bien estirada.

La segunda categoría se ocupa de las intuiciones conjeturales. Fischbein (1987) considera que en este modelo de intuición hay una perspectiva explícita de la solución de un problema, sin embargo, el sujeto no está específicamente involucrado en un esfuerzo por su resolución. En otras palabras, este tipo de intuición se refiere a suposiciones vinculadas al sentimiento de certeza. De esta manera, las intuiciones conjeturales "representan afirmaciones sobre eventos futuros o sobre el curso de un determinado evento, siendo una visión global preliminar que precede a la solución analítica y completamente desarrollada de un problema" (Sousa, 2022, p. 202).

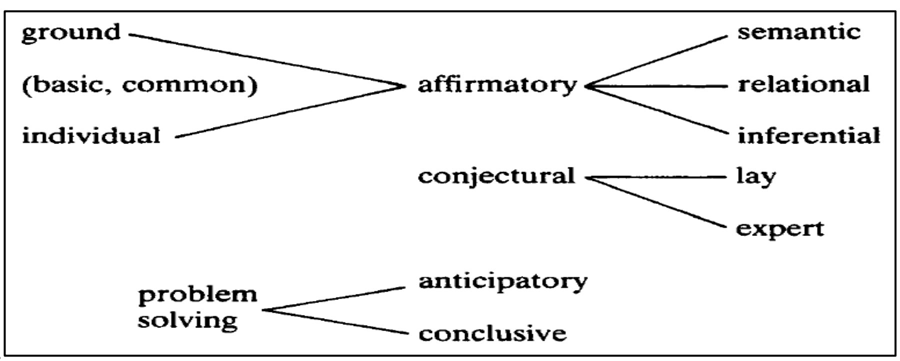
La tercera categoría propuesta por el autor son las intuiciones anticipatorias. Fischbein (1987) explica que este tipo de intuición proporciona un punto de vista absoluto, previo a la solución de un problema, que precede a la resolución analítica completamente desarrollada. De esta forma, el sujeto que está resolviendo el problema ve todos los pasos hacia su solución y comprende el camino que debe seguir para llegar a la respuesta esperada, esta intuición influye y dirige las etapas de búsqueda y construcción de la solución, donde hay una aplicación concreta de estrategias que ayudan efectivamente a identificar una solución adecuada. Se puede suponer que las intuiciones anticipatorias están estimuladas por intuiciones afirmativas preexistentes.

La cuarta categoría son las *intuiciones conclusivas*, que sintetizan una visión globalizada y estructurada de las ideas básicas para la solución de un problema, previamente elaboradas, dependiendo así de los otros tres tipos de intuición mencionados anteriormente (Fischbein, 1987), permitiendo la generalización de la estructura matemáticas para los problemas propuestos y replicación del modelo de solución en situaciones similares.

Fischbein (1987, p. 64) propone un esquema, en el que trae una primera clasificación de modelos intuitivos, como se muestra a continuación (Figura 2):

Figura 2

Esquema referente a la primera clasificación de la intuición.



Nota: Fuente: Fischbein (1987, p. 64)

En el esquema propuesto en la Figura 2, el autor establece una relación entre las intuiciones y algunas palabras clave que nos permiten conectar la categoría intuitiva y el modelo de razonamiento que se da en su estructura. En el caso de la intuición afirmativa, por ejemplo, tenemos que su génesis es natural e intrínseca al individuo, y que puede darse a través de estructuras deductivas o inductivas. Por conseguiente, el alumno relaciona sus conocimientos previos a través de la semántica y las inferencias, estableciendo relaciones entre lo que ya tiene como conocimiento y lo considera verdadero, aunque su modelo mental no sea el correcto.

En el caso de la intuición conjetural, Fischbein (1987) trae en este esquema la diferenciación entre las intuiciones producidas por legos y expertos en un tema determinado, en función de su capacidad de seleccionar información, observando sus aspectos más relevantes para construir la solución de un problema. Brousseau y Gibel (2005) también comentan un pasaje relacionado con esto en su trabajo, cuando señalan la diferencia de significado de un mismo razonamiento, según haya sido producido por un alumno o un profesor, considerando que el bagaje de el conocimiento previo de ambos os es diferente y, en consecuencia, sus formas de establecer conjeturas e hipótesis también lo son.

Finalmente, el autor considera que las intuiciones anticipatorias y conclusivas son intuiciones específicas para la resolución de problemas. Como señala Fischbein (1987), tales categorías intuitivas "no establecen simplemente un hecho (aparentemente) dado [...] aparecen como un descubrimiento, como una solución a un problema y el resultado (aparentemente) repentino de una resolución de esfuerzo anterior". (p. 61)

Fischbein (1987, 1992, 1999) examina minuciosamente el proceso de enseñanza y aprendizaje al considerar que, recurrentemente, los estudiantes enfrentan obstáculos en su aprendizaje, comprensión y resolución de problemas en niveles más avanzados, dado que, en ocasiones, sus técnicas y estrategias de razonamiento son deficientes. Por ello, Fischbein (1987, 1999) alienta a los docentes a cuestionarse cómo podrían, por ejemplo, reconocer esquemas mentales tan inadecuados en sus alumnos, a partir de su conocimiento sobre las distintas manifestaciones del razonamiento intuitivo, adaptando sus prototipos y paradigmas de transmisión didáctica, basado en las Categorías del Razonamiento Intuitivo.

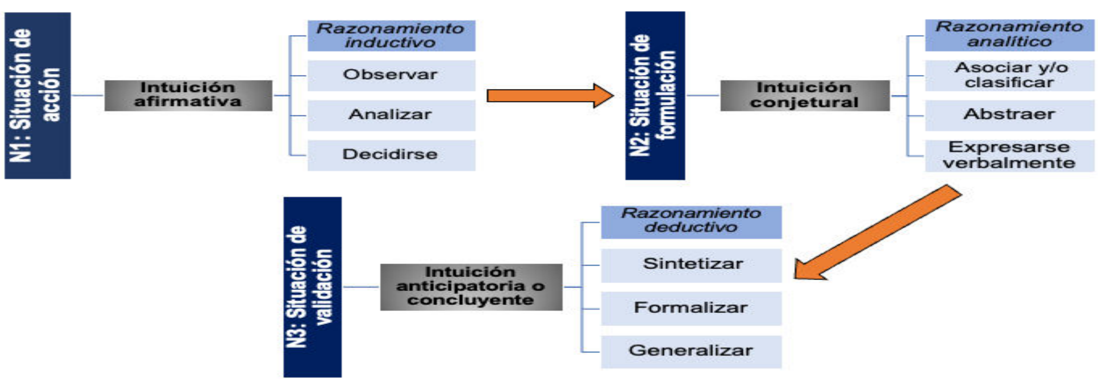
Como una forma de comprender mejor los niveles de razonamiento discutidos y su relación con la intuición como facultad ontológica, en la siguiente sección proponemos una articulación entre las perspectivas presentadas en las secciones anteriores.

Una articulación entre las teorías esbozadas y sus implicaciones para la enseñanza

A la vista de lo expuesto en los apartados anteriores, podemos inferir una relación entre lo que Brousseau y Gibel (2005) proponen como los diferentes niveles de razonamiento matemático en el desarrollo de la Teoría de las Situaciones Didácticas y lo que Fischbein (1987) explica en su clasificación de la intuición, denominada como Categorías de Razonamiento Intuitivo. En este sentido, proponemos una correlación entre las ideas de los autores, según el esquema (Figura 3):

Figura 3

Relación entre niveles de razonamiento y categorías intuitivas.



Nota: Fuente: Elaboración de los autores.

Cuando Brousseau y Gibel (2005) proponen el Nivel 1 de Razonamiento (N1), describiéndolo como un modelo de razonamiento aún no formulado, pero relacionado con la posición del sujeto en una situación de acción en TSD, podemos ver una similitud con la categoría intuición afirmativa de Fischbein (1987). Esta relación se puede percibir cuando Fischbein (1987) propone que el sujeto tiene una visión preliminar del problema y una visión superficial de su camino de solución, siendo capaz de observar y analizar, a partir de estructuras de pensamiento inductivo. En este nivel de razonamiento y categoría intuitiva, el estudiante aún no ha tomado ninguna acción para resolverlo, pero está en proceso de predecir sus hipótesis y luego establecer un camino que tenga sentido para él.

El Razonamiento de Nivel 2 (N2) propuesto por Brousseau y Gibel (2005) se considera inacabado desde el punto de vista formal, pero con lagunas que implícitamente pueden ser rellenadas a partir de la actuación del alumno en una situación de formulación en el TSD. Este modelo de razonamiento se puede relacionar con las intuiciones conjeturales propuestas por Fischbein (1987), en las que el estudiante parte de un razonamiento analítico sobre cada una de las partes del problema. Es decir que el estudiante inicia sus deducciones desde un punto de partida, pudiendo asociar, clasificar y expresarse verbalmente, formulando ideas y estableciendo un camino para la solución de forma más explícita.

Desde esta perspectiva, podemos entender que el Razonamiento de Nivel 3 (N3), definido por Brousseau y Gibel (2005) como un modelo formal, global y acabado, que se basa en la conexión secuencial de inferencias articuladas cohesivamente (aunque tal razonamiento no es absolutamente correcto), como formato presentado en situaciones de validación en el TSD. De esta forma, podemos relacionar el Razonamiento de Nivel 3 con lo que Fischbein (1987) propone como intuición anticipatoria y/o intuición conclusiva, dependiendo de cómo este razonamiento fue producido por el estudiante.

Consideramos intuición anticipatoria, ya que el estudiante, en este curso de razonamiento, es capaz de visualizar una solución analítica completamente desarrollada, presentando una lógica coherente para su solución, siendo capaz de sintetizarla y formalizarla. También es concluyente si el estudiante tiene plena comprensión y articulación entre sus conocimientos previos y el desarrollo de nuevos conocimientos a partir de la movilización del razonamiento deductivo. Esto puede establecer una uniformidad y una generalización de su solución para situaciones similares a las anteriores, siendo validada esta generalización por el docente en una situación posterior de institucionalización.

Entendemos que tanto los niveles de razonamiento propuestos por Brousseau y Gibel (2005) como las categorías establecidas por Fischbein (1987) muestran que la trayectoria de aprendizaje de un nuevo razonamiento se da cuando se promueve desde un solo medio particular de solución de un problema a un medio universal de resolver todos los problemas de un tipo dado, y se integra como tal con el conocimiento del sujeto. En una situación autónoma, el razonamiento se basa en la inducción, pero esta inducción se apoya en una cadena de inferencias que se pueden hacer explícitas. La identificación de modelos intuitivos y niveles de razonamiento requiere un análisis teórico a priori de los comportamientos, dificultades y procedimientos que pueden surgir en las fases de aula y en el desarrollo de una situación didáctica.

Sin embargo, Fischbein (1992) aclara que un estudiante no asimila pasivamente conceptos construidos/impuestos culturalmente, sino que los construye activamente, a partir de sus percepciones (sensoriales) e intuiciones (cognitivas), así como de sus experiencias previas, pero bajo el fuerte impacto de la experiencia social. En este caso, la experiencia social y los conocimientos previos del estudiante son considerados por Brousseau (1976, 1998) como parte de los elementos estructurantes del milieu.

La mayéutica socrática suele describirse como el arte de llevar a alguien a producir su propio conocimiento mediante preguntas, sin que Sócrates agregue nada a este conocimiento. En este sentido, las situaciones didácticas fundamentales deben orientar el modelo de abordaje del docente a la hora de proponerlas a los alumnos (Brousseau y Gibel, 2005). Paralelamente, en cuanto al modelo (didáctico y/o paradigmático) y sus implicaciones para la construcción del razonamiento, Fischbein (1992) reitera que:

> La teoría de los modelos paradigmáticos pasa a formar parte de una teoría más amplia, la de los modelos mentales, con todas sus implicaciones psicológicas y didácticas. Usamos modelos en nuestros procesos de razonamiento por muchas razones. Generalmente son más familiares, más accesibles, más simples, mejor estructurados, más fáciles de manipular, práctica o mentalmente, que el original. (p. 109)

Tales modelos son elaborados de manera propositiva y consciente, para viabilizar la búsqueda de una solución. Se deben realizar bocetos preliminares u otro tipo de simulación para comprender el posible comportamiento tanto de los dispositivos proyectados como de los sujetos involucrados. En una concatenación de ideas, podemos construir una relación inferencial asociando los modelos paradigmáticos propuestos por Fischbein (1992) y la construcción de la situación fundamental (adidáctica), así como la estructuración del milieu en Brousseau (1976).

La identificación tanto de los modelos implícitos de razonamiento a diferentes niveles propuestos por Brousseau y Gibel (2005) como de las Categorías del Razonamiento Intuitivo de Fischbein (1987) requiere un análisis teórico a priori de los comportamientos, dificultades y procedimientos que pueden surgir en las distintas fases de la lección y el desarrollo de una situación didáctica.

Esto permite conjeturar que uno de los factores que pueden limitar las posibilidades del docente para considerar, articular y procesar el razonamiento de los estudiantes no es tanto la complejidad de este razonamiento, sino otra característica, relacionada con la naturaleza misma de la situación propuesta, la que exige mucha atención y planificación.

Conclusiones

La intuición es una facultad cognitiva que tiene el potencial de aprovechar, en la medida de lo posible, interpretaciones nuevas, adecuadas y coherentes, junto con la evolución de las estructuras formales del razonamiento lógico. Puede darse a medida que el alumno realiza actividades prácticas adecuadas y no sólo a través de meras explicaciones verbales.

La capacidad intuitiva responde al contexto general de las situaciones didácticas, y no a elementos aislados o abstractos, requiere pensamiento analítico y está en el dominio del sistema racional. También tenemos que el pensamiento racional requiere característicamente un paso a la vez, siendo estos pasos explícitos y generalmente claramente evidenciados por el que piensa (estudiante) a otro individuo (otro estudiante o el profesor). Tal pensamiento procede con una conciencia relativamente completa de la información y las operaciones involucradas.

Los trabajos de Brousseau y Gibel (2005) y Fischbein (1987) nos brindan un aporte para comprender cómo la intuición, en un ámbito epistémico, cognitivo e incluso filosófico, es relevante para el campo educativo. Un docente que comprende tales nociones intuitivas y niveles de razonamiento tiene mayor capacidad para comprender las dificultades de aprendizaje intrínsecas al campo de las matemáticas, con la oportunidad de predecirlas y superarlas.

La intuición ligada a la Didáctica de las Matemáticas y la Psicología Cognitiva, a través de las teorías dilucidadas, es un vasto campo a ser investigado, siendo un terreno fértil de información a partir de un sagaz análisis del comportamiento de los alumnos a través de situaciones didácticas puestas en práctica en el aula. El docente puede identificar el razonamiento intuitivo en la resolución de problemas, entendiendo las dificultades y los niveles de aprendizaje.

Referencias

Alves, F. R. V. (2012). Insight: descrição e possibilidades de seu uso no ensino do cálculo. *Vidya*, *32*(2), 49-161.

Alves, F. R. V. (2016). Categorias intuitivas para o ensino do Cálculo: descrição e implicações para o seu ensino. *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia*, *9*(3), 1-21.

Alves, F. R. V. (2019). Visualizing the Olympic Didactic Situation (ODS): teaching mathematics with support of the GeoGebra software. *Acta Didactica Napocensia*, *12*(2), 97-116.

Alves, F. R. V. y Acioly-Régnier, N. M. (2021). Comunicação no ensino, na aprendizagem e na atividade profissional do professor de Matemática: implicações da Didática Profissional (DP). *IE Revista De Investigación Educativa de la REDIECH*, *12*, 1-17.

Alves, F. R. V. y Borges Neto, H. (2011). A contribuição de Efraim Fischbein para a Educação Matemática e a formação do professor. *Conexão, Ciência e Tecnologia*, *5*(1), 38-54.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 281-308.

Bachelard, G. (1996). *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. Contraponto Editora.

Blattberg, R. C. y Hoch, S. J. (1990). Database Models and Managerial Intuition: 50% Model + 50% Manager. *Management Science*, *36*(8), 887-899.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In W. Vanhamme y J. Vanhamme. (Eds.). *La problématique et l'enseignement de la mathématique*. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, Louvain-la-neuve, pp. 101-117.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d´enseignement de mathématiques*. (Thèse d´État et Sciences). Université de Bordeaux I.

Brousseau, G. (1996). Os diferentes papéis do professor. In C. Parra y I. Saiz. (Eds.). *Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas.* Artes Médicas.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. Ática.

Brousseau, G. y Gibel, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problems solving situations. In C. Laborde, M. J. Perrín-Glorian and A. Sierpinska. (Eds.). *Beyond the Apparent Banality of the Mathematics Classroom*. Springer, pp. 13-58.

Chevallard, Y. (1991). *La Transposition didactique.* La Pensée Sauvage Éditions.

Diccionario Michaelis. (2022). Michaelis Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/

Epstein, S. (1994). Integration of the cognitive and the psychodynamic unconscious. *American Psychologist*, *49*(8), 709-724.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: an educational approach*. Mathematics Educational Library.

Fischbein, E. (1992). The psychological nature of the concepts. In H. Mansfield, N. A. Pateman and N. Bednarz (Eds.). *Mathematics for tomorrow's young children: international perspectives on curriculum*. Papers from 7th International Congress on Mathematical Education, Quebec, Canadá. Springer, pp. 102-119.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139-162.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *38*(11), 11-50.

Gamoneda, A. y González, F. (2018). *Idea súbita. Ensayos sobre epifanía creativa*. Abada.

Gibel, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Éducation Didactique*, *9*(2), 51-72.

Grande, A. L. y Silva, B. A. (2013). Resolução de questões relacionadas ao cálculo e o uso da intuição e do rigor. *Educação Matemática Pesquisa*, *2*(1), 27-38.

Hadamard, J. (1945). *An essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton University Press.

Kidron, I. (2011). Tacit models, treasured intuitions and the discrete - continuous interplay. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(1), 109-126.

Lieberman, M. D. (2000). Intuition: A Social Cognitive Neuroscience Approach. *Psychological Bulletin*, *126*(1), 109-137.

Margolinas, C. (2005). Essai de généalogie en didactique des mathématiques. *Revue suisse des sciences de l'éducation*, *27*(3), 343-360.

Margolinas, C. (2015). Situations, savoirs et connaissances…comme lieux de rencontre? *Formation et pratiques d'enseignement en questions*, *2*(19), 31-39.

Moreira, M. A. y Rizzatti, I. M. (2020). Pesquisa em ensino. *Revista Internacional de Pesquisa em Didática das Ciências e Matemática*, *1*, 1-15.

Otte, M. (1997). Analysis and synthesis in mathematics from the perspective of Charles S. Peirce's philosophy. In M. Otte and M. Panza (Eds.). *Analysis and synthesis in mathematics: History and Philosophy*. Kluwer Academic Publishers, 327-364.

Pais, L. C. (1996). Intuição, experiência e teoria geométrica. *Zetetiké*, *6*. https://doi.org/10.20396/zet.v4i6.8646739

Poincaré, H. (1899). La logique et l'intuition dans la Science Mathématique. *L´enseignement Mathématique*, *1*, 157-162.

Poincaré, H. (1900). *Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques*. In: Compte-rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens tenu à Paris, 115-130.

Poincaré, H. (1904). *L'enseignement des sciences mathématiques et des sciences physiques*. Musée pédagogique, Paris. Publications du Musée pédagogique, 6, Imprimerie Nationale, 1-28.

Poincaré, H. (1908). L'invention mathématique. *Bulletin de l'Institut Général de Psychologie*, 8è année, numéro 3, 175-196.

Pretz, J. E., Naples, A. J. y Sternberg, R. J. (2003). Recognizing, Defining, and Representing Problems. In J. E. Davidson and R. J. Sternberg (Eds.). *The psychology of problem solving*. Cambridge University Press, 3-30.

Schooler, J. W. y Melcher, J. (1995). The ineffability of insight. In S. Smith, T. Ward and R. Finke (Eds.). *The creative cognition approach*, Cambridge, MA: MIT Press, 97-133.

Sousa, R. T. (2022). Resenha de "A intuição em ciências e matemática: uma abordagem educacional", de Fischbein, E., 1987. *Contraponto*, *3*(3), 199-203. https://doi.org/10.21166/ctp.v3i3.2083