La inversión, teoría y recomendaciones metodológicas para su tratamiento

Inversion, theory and methodological recommendations for its treatment

Diógenes Feliciano González Hernández[1]

Miguel Eduardo González Díaz[2]

Nolbert González Hernández[3]

Resumen

En la investigación se expone de manera lógica y deductiva la teoría de inversión. Para ello, se exponen las principales definiciones y teoremas que caracterizan a la transformación, se incluyen teoremas que constituyen recursos complementarios de valor para la solución de problemas de Geometría Plana en las modalidades de cálculo. Además, se incluyen demostraciones y construcciones auxiliares, así como recomendaciones metodológicas para el tratamiento de este contenido con el objetivo de lograr mayor desarrollo y flexibilidad en el pensamiento dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Estas recomendaciones metodológicas están dirigidas a lograr que los estudiantes construyan la mayor parte del conocimiento, los cuales se utilizarán posteriormente en el planteo y la resolución de problemas.

Palabras clave: inversión matemática, planteo y resolución de problemas, recomendaciones metodológicas

Abstract

In the investigation, the investment theory is exposed in a logical and deductive way. For this, the main definitions and theorems that characterize the transformation are exposed, including

1 Licenciado en Educación Matemática, Máster en Didáctica de la Matemática, profesor auxiliar, Universidad de Holguín, Cuba. E-mail: feliciano.gh@uho.edu.cu ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0656-8137
2 Licenciado en Matemática, instructor, Universidad de Holguín, Cuba. E-mail: eduardom@uho.edu.cu ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3955-4900
3 Licenciado en Educación Matemática-Física, Máster en Educación Matemática Universitaria, instructor, Universidad de Holguín, Cuba. E-mail: nolbertreblon@gmail.com ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9579-1073

Fecha de recepción: 14/12/2022 Fecha de aceptación: 20/11/2023

theorems that constitute complementary resources of value for the solution of plane geometry problems in the calculation modalities. In addition, demonstrations and auxiliary constructions are included, as well as methodological recommendations for the treatment of this content to achieve greater development and flexibility in thinking within the Mathematics teaching-learning process. These methodological recommendations are aimed at ensuring that students build most of the knowledge, which will be used later in the posing and solving of problems.

Keywords: mathematical inversion, posing and problem solving, methodological recommendations

Introducción

La Geometría es una rama importante dentro del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática. Debido a esa importancia, se han realizado diferentes investigaciones sobre la enseñanza de la Geometría desde diferentes posturas científicas (Molina, et al., 2019; Rojas, 2020; Badillo y Rodríguez, 2021). No obstante, al realizar una revisión bibliográfica de investigaciones y documentos relacionados con la educación geométrica (Oliver, et al., 2018; Carmenates y Tarrío, 2019; González, 2020; Aldazabal, et al., 2021; Urrego, 2021) se ha llegado a la conclusión de que la transformación inversión aparece expuesta en textos para estudiantes y profesores de la enseñanza general en algunos países de Iberoamérica, aunque con poca profundidad y solo aplicado construcciones geométricas.

En Cuba, la literatura relacionada con la transformación inversión ha tenido una divulgación deficiente, por lo que la mayoría de los profesores desconocen este tema. Teniendo en cuenta esta problemática en la presente investigación se ha decidido exponer de manera lógica y deductiva la teoría de inversión, para ello se ha utilizado en su fundamentación solo conocimientos de la Geometría Plana. Además, se brinda recomendaciones metodológicas para el tratamiento del contenido con los estudiantes. El objetivo es lograr mayor desarrollo y flexibilidad en el pensamiento de alumnos y profesores respecto al empleo de la transformación inversión en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática.

La teoría que se utiliza en el desarrollo de la investigación se recopiló de una diversa bibliografía revisada sobre la transformación inversión, entre la que destacan (Roanes, 1993; Figueroa, 2017). Esta teoría se ha reordenado y se ha ampliado con demostraciones realizadas en el marco de la presente investigación, donde predomina un enfoque basado solamente en los contenidos que sobre la Geometría Plana se estudian en la escuela media cubana.

Desarrollo

Teoría básica sobre la transformación inversión

A este apartado teórico relacionado con la transformación inversión se le ha llamado teoría básica de inversión porque en ella se exponen los conceptos y propiedades más importantes que caracterizan este contenido. La aprehensión de los conocimientos que aquí se exponen brinda la posibilidad de conocer a profundidad la inversión.

Puntos inversos y sus consecuencias

Definición 2.1.1: Dos puntos P y P' se denominan puntos inversos o simétricos respecto a una circunferencia $C(o;r)$ si se cumple que:

a) P y Pestán en la misma semirrecta de origen O,

b) $OP \cdot OP' = r^2$

Donde el punto O es el centro de inversión, C la circunferencia de inversión y r el radio de inversión.

Consecuencias: estas consecuencias son propiedades elementales de la inversión, las cuales facilitan la asimilación del resto de la teoría. Para comprender y/o realizar sus demostraciones solo se necesita tener bien formado el concepto de puntos inversos y algunas propiedades de la Matemática que son fundamentales.

1. a) Si $p(x;y)$ es un punto cualquiera del plano distinto del centro de inversión y $P'(x';y')$ su imagen mediante la inversión de centro $O(a,b)$ y su radio r. Las ecuaciones analíticas de estas transformaciones son:

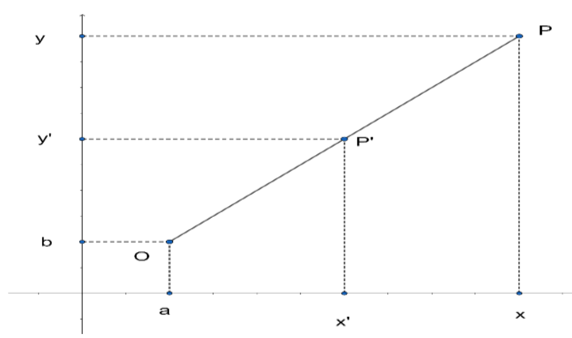
$$x' - a = \frac{r^2(x-a)}{(x-a)^2+(y-b)^2} \qquad y' - b = \frac{r^2(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

Demostración

Para realizar esta demostración se ha utilizado la siguiente construcción geométrica auxiliar (Figura 1):

Figura 1

Consecuencias de la definición 2.1.1.



Nota: Figura auxiliar utilizada para la demostración de las consecuencias de la definición 2.1.1.

Aplicando el teorema de las transversales resulta que $\frac{x-a}{OP} = \frac{x'-a}{OP'}$ y $\frac{y-b}{OP} = \frac{y'-b}{OP'}$

Pero de $CP \cdot OP' = r^2$ resulta: $\frac{OP'}{OP} = \frac{r^2}{OP^2} = \frac{r^2}{(x-a)^2+(y-b)^2}$

Combinando los resultados anteriores obtenemos:

$x' - a = \frac{r^2(x-a)}{(x-a)^2+(y-b)^2}$ y $y' - b = \frac{r^2(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2}$ que es lo que se ha querido demostrar.

Definición 2.1.2 Un punto situado en la circunferencia de inversión, es su propio inverso.

$$OP = r \text{ y } OP \cdot OP' = r^2 \rightarrow OP' = r$$

Definición 2.1.3. De dos puntos inversos distintos, si uno está situado en el interior de la circunferencia de inversión, entonces el otro está situado en el exterior y viceversa.

$$OP < r \text{ y } OP \cdot OP' = r^2 \rightarrow OP' > r$$

Definición 2.1.4. Cada punto del plano, excepto el centro de inversión, tiene un único inverso.

Consecuencias: Sea P un punto del plano, $P \neq 0$, donde 0 es el centro de inversión y r el radio. De la definición se deduce que siempre va a existir una imagen P' para cada punto P, pues de $OP \cdot OP' = r^2$ se deduce que $OP' = \frac{r^2}{OP}$. Además, si se supone que P' y P'' son imágenes de P por la inversión de centro 0 y radio r resulta que:

$$OP \cdot OP' = r^2 \text{ y } OP \cdot OP'' = r^2 \rightarrow OP' = OP'' \rightarrow \quad P' = P''.$$

De esta consecuencia se deduce que la inversión es una función.

Definición 2.1.5. Dos puntos, distintos entre sí y distintos el centro de inversión, tienen imágenes distintas.

Demostración

Sean $P_1 \neq P_2$ dos puntos cualesquiera, distintos del centro de inversión O. Por la inversión de centro O y radio r se obtiene que P'_1 y P'_2 son imágenes de P_1 y P_2respectivamente.

Caso 1. Supongamos que $OP_1 < OP_2$, entonces:

$$OP_1 \cdot OP'_1 = r^2 \text{ y } OP_2 \cdot OP'_2 = r^2 \rightarrow OP_1 \cdot OP'_1 = OP_2 \cdot OP'_2$$

Mayorando la última relación con $OP_1 < OP_2$, resulta:

$$OP_2 \cdot OP'_1 > OP_2 \cdot OP'_2 \rightarrow OP'_1 > OP'_2$$

De este primer caso se deduce, además, que los puntos alejados del centro de inversión, tienen las imágenes más próximas a este.

Caso 2. Supongamos que $OP_1 = OP_2$ y $P_1 \neq P_2$.

En este caso $P'_1 \neq P'_2$ porque están en distintas semirrectas. Por lo que, esta transformación es una función inyectiva.

Definición 2.1.6. Cada punto del plano, distinto del centro de inversión, es una imagen de una pre-imagen.

Esta propiedad es consecuencia inmediata de la definición de transformación inversión.

Definición 2.1.7. La imagen de la imagen de un punto por la misma inversión, es el propio punto, por lo tanto, la inversión es una transformación involutiva.

Determinación de imágenes de puntos por inversión

Los teoremas que aquí se exponen constituyen procedimientos prácticos para reconocer y construir con regla y compás inversos de puntos dados.

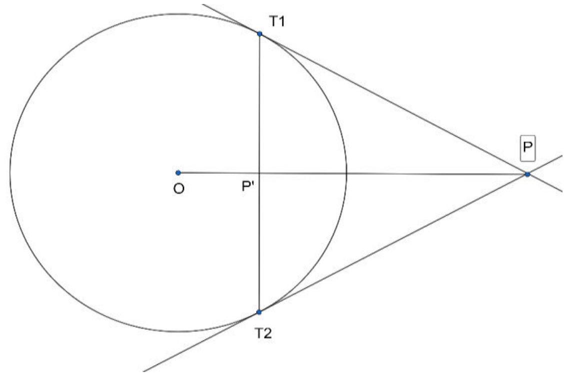
Teorema 2.2.1. La imagen por inversión de un punto exterior a la circunferencia de inversión, es el punto medio de la cuerda que une los pies de las tangentes trazadas desde el punto a dicha circunferencia.

Demostración

Sea O el centro de una circunferencia dada (Figura 2), P un punto exterior a la misma, T_1 y T_2 los pies de las tangentes desde P a O (P' es el punto de intersección de OP con $\overline{T_1T_2}$).

Figura 2

Figura auxiliar utilizada para la demostración del Teorema 2.2.1.



Nota: elaboración propia *para la demostración del Teorema 2.2.1*.

Triángulos OT_1P y $T_1P'O$ son rectángulos, por tanto OP' es la proyección del cateto OT_1 sobre la hipotenusa OP, luego $OT^2{}_1 = OP \cdot OP'$. De esta última relación se deduce que P' es una imagen por inversión del punto P, respecto a la circunferencia de centro O.

Teorema 2.2.2 La imagen de un punto interior a la circunferencia de inversión, es el punto de intersección de las tangentes trazadas por los extremos de la cuerda que es perpendicular en el punto dado, al radio que pasa por dicho punto.

La demostración de este teorema es análoga a la demostración hecha para el teorema 1.

Las curvas inversas y sus consecuencias

La mayor parte de la bibliografía consultada no define explícitamente el concepto de curvas inversas, sino que la teoría precedente se obtiene a partir de la definición de puntos inversos. En la presente investigación, se considera que para una construcción rigurosa de la teoría es necesaria la definición de curvas inversas, por lo que se plantea a continuación:

Definición 2.3.1. Sea R una curva y C una circunferencia, se denomina curva inversa de$R$ respecto a C a la curva formada por las imágenes de cada uno de los puntos de R respecto a C. Estas curvas se denominan inversas.

Consecuencias: estas consecuencias, de forma similar a las anteriores son propiedades elementales de la inversión y se deducen inmediatamente de la definición de curvas inversas, de la definición de puntos inversos y de sus consecuencias. Constituyen, además, bases para la deducción y demostración de nuevas propiedades.

1. El inverso de una circunferencia concéntrica a la de inversión es una circunferencia con el mismo centro que la anterior.

Como las pre-imágenes equidistan del centro, las imágenes también lo harán. En particular, si una circunferencia coincide con la circunferencia de inversión es su propia inversa (esta circunferencia es una circunferencia fija, de puntos fijos).

2. El inverso de una recta que pasa por el centro de inversión es ella misma (excepto el centro).

Según la definición de puntos inversos, un punto y su inverso son colineales con el centro de inversión, por tanto la imagen de cada punto que pasa por el centro de inversión, es un punto de ella misma; teniendo en cuenta que la inversión es una transformación involutiva, entonces la imagen de dicha recta es ella misma. Luego, las rectas que pasan por el centro de inversión son rectas fijas, estas rectas solo tienen dos rectas fijas (los puntos de intersección con la circunferencia es la inversión).

3. Si una curva y su imagen por inversión se interceptan, todos sus puntos de intersección están en la circunferencia de inversión; recíprocamente, si una de dos curvas inversas intercepta a la circunferencia de inversión, la segunda intercepta a la primera en el mismo punto. Como los únicos puntos fijos en la inversión son los que están situados en la circunferencia de inversión, teniendo en cuenta que los puntos de intersección son puntos donde coinciden imágenes y pre imágenes, entonces estos puntos tienen que estar en la circunferencia de inversión. La demostración de la propiedad recíproca de la demostrada se realiza de manera análoga.

Inverso de rectas y circunferencias

Los teoremas del presente epígrafe completan la diferenciación de casos que se han iniciado anteriormente sobre los inversos de rectas y circunferencias.

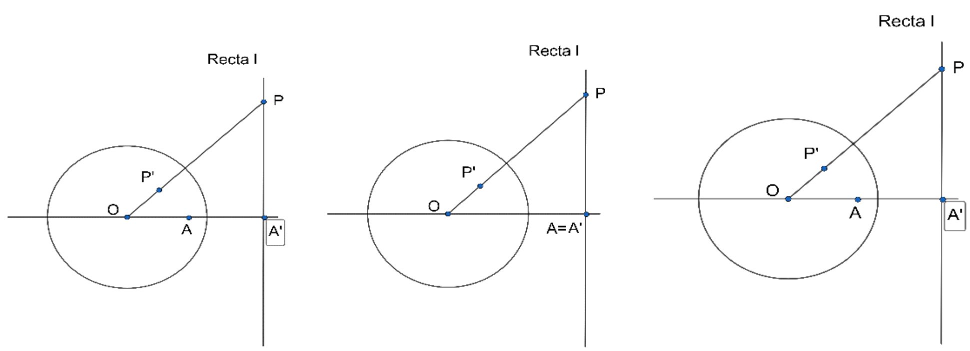
Teorema 2.4.1. El inverso de una recta que no pasa por el centro de inversión, es una circunferencia que pasa por el centro de inversión; y recíprocamente, el inverso de una circunferencia de radio finito, que pasa por el centro de inversión, es una recta que no pasa por el centro de inversión. Más aún, la recta es perpendicular a la recta que contiene el diámetro que pasa por el centro de inversión.

Demostración:

Sea A el pie de la perpendicular trazada desde el centro de inversión O sobre la recta dada l, y P un punto cualquiera de l, distinto de A. Denotemos A' el inverso de A, y por P' el de P. Según la definición de puntos inversos existen dos casos posibles, que $A \neq A'$, $A = A'$ (Figura 3).

Figura 3

Figura auxiliar utilizada para la demostración del Teorema 2.4.1.



Nota: elaboración propia para la demostración del Teorema 2.4.1.

De estas relaciones se deduce que: $OA \cdot OA' = r^2$ y $OP \cdot OP' = r^2 \rightarrow \frac{OA}{OP\prime} = \frac{OP}{OA\prime}$

De esta relación y conociendo que el ángulo AOP es común a los triángulos OPA y $OP'A$' se deducen que los mismos son inversamente semejantes. Por tanto, el vértice P' del ángulo recto $OP'A'$ está en la circunferencia de diámetro OA'.

Como a P no se le ha puesto ninguna condición especial, para todos los puntos P de la recta l, su imagen estará en la circunferencia de diámetro CA'. Por tanto, la imagen de la recta$l$ es la circunferencia de diámetro OA' (excepto el punto O).

Recíprocamente, si P' es un punto de la circunferencia que pasa por el centro de inversión, su imagen P está en una recta perpendicular a OA que pasa por A, esta relación se fundamenta en la semejanza de los triángulos OAP y $OA'P$o por ser la inversión una transformación involutiva. Por tanto, la imagen, por inversión, de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta perpendicular a la recta que pasa por el centro de inversión y contiene el diámetro de la circunferencia.

Colorario 2.4.1. La imagen por inversión de dos puntos no colineales con el centro de inversión, determinan un segmento antiparalelo al segmento determinado por los puntos originales.

Colorario 2.4.2. Las rectas paralelas, ninguna de las cuales pasa por el centro de inversión, sus imágenes son circunferencias que pasan por el centro de inversión siendo este el único punto común entre estas rectas. Por tanto, son tangentes interiores o exteriores a la circunferencia de inversión.

Teorema 2.4.2. El inverso de una circunferencia de radio finito que no pasa por el centro de inversión, es una circunferencia de radio finito que tampoco pasa por este punto.

Demostración. Para la construcción de la figura auxiliar es necesario diferenciar tres casos:

a) Que el centro de inversión coincida con el centro de la circunferencia.

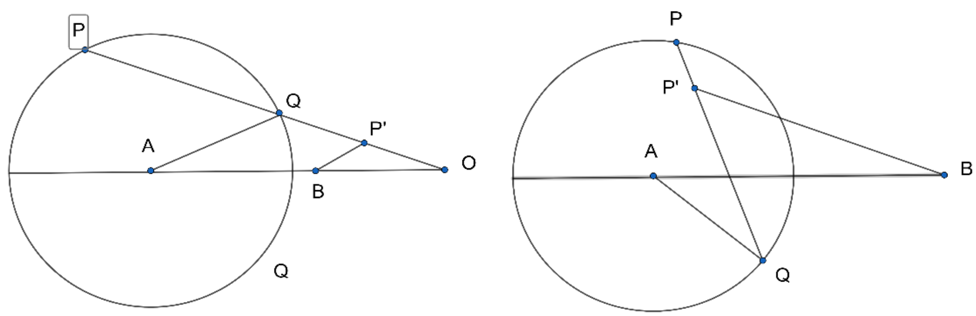
b) Que el centro de inversión sea exterior a la circunferencia.

c) Que el centro de inversión sea interior a la circunferencia.

En el caso a ya fue demostrado en las consecuencias de la definición de curvas inversas. Por lo que, se pueden construir (Figura 4) dos figuras de análisis (casos b y c).

Figura 4

Figura auxiliar utilizada para la demostración del Teorema 2.4.2.



Nota: Elaboración propia para la demostración del Teorema 2.4.2.

Sea P un punto cualquiera de la circunferencia dada A, cuyo inverso respecto a $C(O,r)$ es P'; denotemos por Q la segunda intersección de OP con la circunferencia A. Tracemos por P' una paralela QA, esta intersecta a OA en B. Se tiene que:

1. $OP \cdot OP' = r^2$ y

2. $OP \cdot OQ = k$

Donde K es constante, ya que O es un punto dado y la circunferencia A esta dada, por tanto K es la potencia de O respecto a A.

De $OP \cdot OP' = r^2$ y $OP \cdot OQ = k$ se deduce que $\frac{OP'}{OQ}$ es contante, es decir:

$$\frac{OP\cdot OP\prime}{OP\cdot OQ}=\frac{r^2}{k}\rightarrow\frac{OP\prime}{OQ}=\frac{r^2}{k}$$

De esta proporción, se deduce en virtud del teorema de las transversales que $\frac{OP\prime}{OQ}=\frac{OB}{OP}=\frac{BP\prime}{AQ}=k$, donde k es constante. Por lo que, se puede asegurar que el punto B es fijo y que BP' es constante, es decir, el lugar geométrico de P' es una circunferencia de radio finito. Como ningún punto de la circunferencia esta infinitamente alejado del centro, el lugar geométrico de P' no pasa por O.

Es evidente que el centro de inversión con respecto al cual las circunferencias A y B son curvas inversas, es uno de los centros de homotecia de las dos circunferencias, es decir, son puntos que dividen el segmento AC en la misma razón que la razón entre sus radios. También es importante destacar que los puntos inversos son antihomotéticos, excepto, en puntos contacto de las tangentes exteriores para el caso en que el centro de inversión sea exterior.

Colorario 2.4.3. Si se toma como centro de inversión el punto tangente de dos circunferencias, estas se transforman en dos rectas paralelas.

Los ángulos en la inversión

La propiedad que recoge el enunciado del siguiente problema es común a todas las transformaciones que los estudiantes conocen de la escuela media, lo cual hace que la inversión sea una transformación conforme. Esta es una de las características más apreciables de la inversión, por lo que su empleo permite tanto resolver como plantear nuevos problemas.

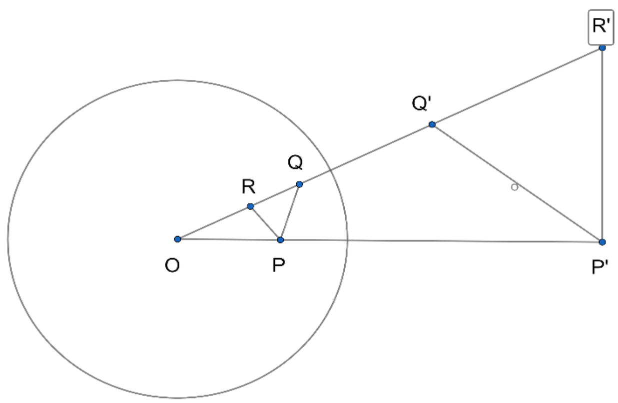
Teorema 2.5.1 Se dos curvas se interceptan en un punto cualquiera distinto del centro de inversión, su ángulo de intersección en ese punto es igual al ángulo de intersección de las curvas imágenes.

Demostración: Sean C_1 y C_2 dos curvas que se intersectan en P, $OP \neq 0$, O centro de inversión. Se ha trazado OPy una segunda recta por O que corta a C_1 y C_2 en los puntos Q y R.

Si P', Q' y R' son los inversos de los puntos P, Qy R, respectivamente, entonces las inversas de C_1 y C_2 pasan por los puntos P', Q' y R' (Figura 5).

Figura 5

Figura auxiliar utilizada para la demostración del Teorema 2.5.1.



Nota: elaboración propia para la demostración del Teorema 2.5.1.

Como PQes antiparalela a $P'Q'$, respecto a OP y OQ, entonces resulta que $\measuredangle QPO = \measuredangle OQ'P'$; de manera análoga se deduce que $\measuredangle RPO = \measuredangle \vee 'P'$. Por sustracción $\measuredangle QPR = \measuredangle Q'P'R'$.

Teoría complementaria

Esta parte de la teoría relacionada con la transformación inversión se le ha llamada teoría complementaria en la presente investigación. Por lo que, se exponen un conjunto de teoremas que sus enunciados contienen propiedades de puntos, curvas y figuras; al aplicar inversión según las posiciones de estos objetos respecto al centro y/o a la circunferencia de inversión. Además, se copilan teoremas que como premisas se dan curvas y sus imágenes por inversión, las cuales imponen condiciones a las circunferencias de inversión, las cuales son también propiedades.

Circunferencias que contienen parejas de puntos inversos:

El siguiente teorema plantea un procedimiento para construir y reconocer parejas de puntos inversos distintos, y circunferencias ortogonales, respecto a una circunferencia dada.

Teorema 2.6.1.1. Cualquier circunferencia que contenga un par de puntos inversos distintos, es su propia inversa, y es ortogonal a la circunferencia de inversión. Inversamente, cualquier circunferencia ortogonal a la circunferencia de inversión es su propia inversa.

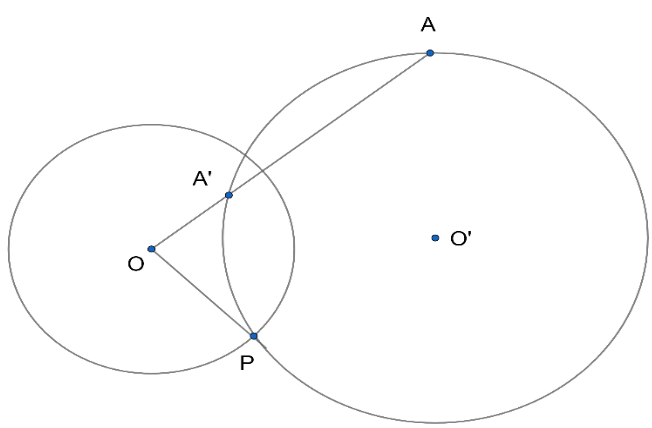
Demostración

Se denota por A y A' una pareja de puntos inversos respecto a la circunferencia dada de centro O y radio r, y por O' una de las circunferencias que contiene a A y A'.

Según las premisas se cumple que $OA \cdot OA' = r^2$, pero $OA \cdot OA'$es la potencia de O' respecto a O, por tanto, cualquier otra pareja de puntos de O' que sean colineales con O cumplen que su potencia es igual a r^2. (Figura 6)

Figura 6

Figura auxiliar utilizada para la demostración del Teorema 2.6.1.1.



Nota: elaboración propia para la demostración del Teorema 2.6.1.1.

Sea P uno de los puntos de intersección de O y O', de estos se deduce que $OP^2 = r^2$.

De todo lo anterior podemos concluir que O' es su propia inversa respecto a O. Pero como O' no se le ha impuesto ninguna condición especial podemos concluir, además, que cualquier circunferencia que contenga un par de puntos inversos respecto a una circunferencia dada es su propia inversa. Resta por demostrar que estas circunferencias son ortogonales a la de inversión.

Como OP es radio de la circunferencia de inversión O, entonces se cumple que $OP^2 = OA \cdot OA'$. De esta última relación se deduce que los triángulos OPA' y OPA son semejantes. De esta semejanza entre estos dos triángulos, se obtiene que $\measuredangle OPA' = \measuredangle PAO$, pero el $\measuredangle PAO$ está inscrito en la misma circunferencia de el $\measuredangle OPA'$ por lo que le corresponden el mismo arco. Por tanto OP es tangente a la circunferencia O'.

Como OP es tangente a la circunferencia O', entonces OP es perpendicular a $O'P'$, por tanto, las circunferencias O y O' son ortogonales.

Como a la circunferencia O' no se le ha impuesto ninguna condición especial, entonces podemos asegurar que toda la circunferencia que pasa por dos puntos simétricos respecto a una circunferencia dada es ortogonal.

Las circunferencias ortogonales a la circunferencia de inversión son circunferencias fijas que solo poseen dos puntos fijos, estos son los pontos de intersección con la circunferencia de inversión. Para trazar parejas de puntos inversos basta con trazar una circunferencia ortogonal a la circunferencia de inversión. Para trazar parejas de puntos inversos basta con trazar una circunferencia ortogonal a la circunferencia de inversión. Además, para construir una circunferencia ortogonal a una circunferencia dada basta con hallar una pareja de puntos inversos respecto a la dada y luego trazar una circunferencia que los contenga.

Colorario 2.6.1.1. Los puntos de intersección de dos circunferencias, que son ortogonales a una circunferencia de inversión dada, son simétricos respecto a la circunferencia de inversión.

Localización de centros de circunferencias que resultan ser imágenes por inversión

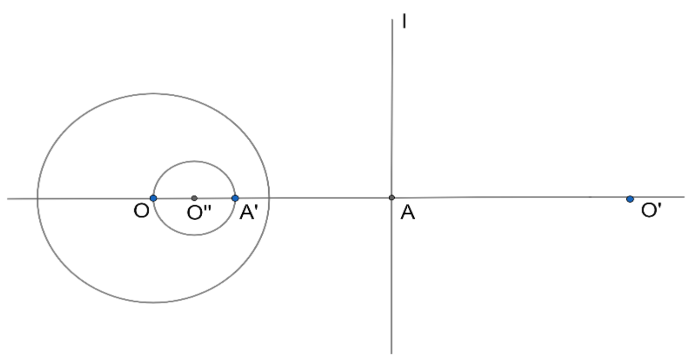
Los teoremas que se exponen a continuación se han obtenido de los procedimientos utilizados para resolver problemas geométricos de construcción con el empleo solamente de un compás.

Teorema 2.7.1 El centro de la circunferencia que se obtiene como imagen de una recta, es el inverso del punto simétrico del centro de inversión, respecto a la recta dada.

Demostración: Sea A el pie de la perpendicular trazada desde el centro de inversión O sobre la recta dada l; O' el simétrico de O respecto a la recta l. Denotemos por A' el inverso de A, y por O''el de O. Se tiene que demostrar que O' es el centro de la circunferencia de diámetro OA'. (Figura 7)

Figura 7

Figura auxiliar utilizada para la demostración del Teorema 2.7.1.



Nota: elaboración propia para la demostración del Teorema 2.7.1.

Según las premisas tenemos que $OO' \cdot OO'' = r^2$ y $OA \cdot OA' = r^2$ donde r es el radio de la circunferencia de inversión. De estas relaciones se deduce que:

$$OA \cdot OA' = OO' \cdot OO'' = 2OA \cdot OO'' \rightarrow 2OO'' = OA' \rightarrow OO'' = \frac{OA'}{2}$$

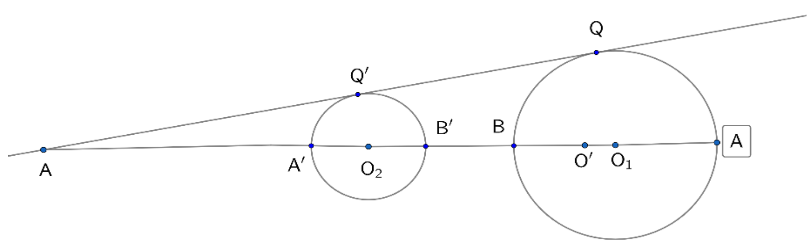
De esta última igualdad se deduce que OO'' es radio de la circunferencia imagen, por tanto, O'' es su centro.

Teorema 2.7.2 El centro de la circunferencia que se obtiene como imagen de una circunferencia, es el inverso del punto simétrico del centro de inversión respecto a la circunferencia dada. Escribaaquílaecuación.

Demostración: Se ha denotado por O el centro de inversión, O_1 y O_2 los centros de las circunferencias inversas y O' el inverso de O respecto a O_1. Para esta demostración se ha construido una figura auxiliar de análisis (Figura 8) y se han diferenciado dos casos posibles.

Figura 8

Figura auxiliar utilizada para la demostración del Teorema 2.7.1. (Caso 1).



Nota: elaboración propia para la demostración del Teorema 2.7.1. (Caso 1).

Caso 1: O es exterior a O_1

Sea QQ' una tangente común de O_1 y O_2. En virtud de la semejanza entre los triángulos rectángulos OQQ' y $OQ'O_2$ se deduce que:

$$\frac{OO_2}{OQ} = \frac{OQ'}{OO'} \rightarrow OO_2 \cdot OO' = OQ \cdot OQ'$$

pero $OQ \cdot OQ' = r^2$ por ser Q y Q'inversos respecto a $C(O, r)$, entonces O_2 y O' son también inversos respecto a la misma circunferencia.

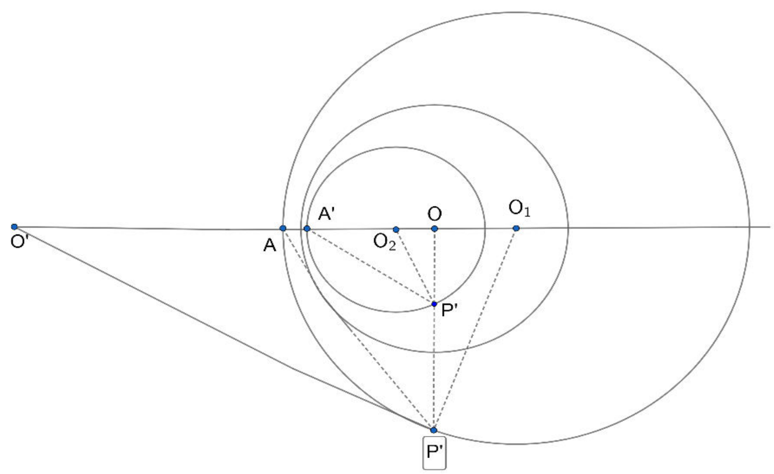
Caso 2: Oes interior a O_1.

Sean A y A', P y P' pares de puntos inversos respecto a O.

Como triángulo $O'PO_1$ es rectángulo en P y PO su altura relativa a la hipotenusa, entonces $\measuredangle O_1O'P = \measuredangle OPO_1 = \alpha$. Como triángulos O_1AP es isósceles de base AP, entonces $\measuredangle O_1AP = \measuredangle O_1PA = \alpha + \gamma$ (Figura 9).

Figura 9

Figura auxiliar utilizada para la demostración del Teorema 2.7.1. *(Caso 2).*



Nota: elaboración propia para la demostración del Teorema 2.7.1. (Caso 2).

Por ser A' y P' respectivamente inversos de A y P, se cumple que:

$$\measuredangle O_1AP = \measuredangle A'P'O = \alpha + \gamma \text{ y } \measuredangle AOP = \measuredangle P'A'O = \gamma$$

Por ser el triángulo $O_2A'P'$ isósceles se cumple que:

$$\measuredangle O_2A'P' = \measuredangle O_2P'A' = \gamma.$$

De las relaciones anteriores se deduce que $\measuredangle PP'O_2 = \alpha$. Por tanto, los triángulos $OP'O_2$ y OPO' son semejantes, de lo que se deduce que $OO_2 \cdot OO' = OP \cdot OP'$; pero $OP \cdot OP' = r^2$ por ser

P y P' puntos inversos respecto a $C(O,r)$, entonces O_2 y O' son también inversos respecto a la misma circunferencia.

Estrategias metodológicas para el tratamiento de la transformación inversión

Para el tratamiento de esta teoría matemática es importante motivar a los estudiantes. En este sentido, su utilidad en la resolución de problemas puede ser una forma de motivar, se sugiere el *Problema de Apolonio* u otro problema con particularidades que refuercen la utilidad de esta teoría.

El Problema de Apolonio plantea: Hallar una circunferencia tangente a tres circunferencias exteriores que no tengan puntos comunes. El objetivo no es que los estudiantes encuentren una solución a este problema, no obstante, se puede valorar algunas de las potencialidades del recurso a estudiar. Las potencialidades del recurso de inversión se pueden valorar mediante el siguiente problema ilustrativo: construye una circunferencia tangente a dos rectas paralelas y a una circunferencia interior a las paralelas. Este problema es una parte del problema que plantea Apolonio para cuando existen circunferencias degeneradas en rectas. Por lo que, el problema está al alcance de las posibilidades de los estudiantes si tenemos en cuenta que estamos en presencia de alumnos de alto rendimiento.

Una vez resuelto el problema ilustrativo, solo debemos informarles a los estudiantes que el problema de Apolonio también está resuelto y palotear las siguientes interrogantes: ¿cómo se explica esto? De la respuesta a esta pregunta debe iluminarse que entre los problemas puede plantearse algún tipo de equivalencia. Además, pueden surgir algunas inquietudes, entre las más frecuentes: este recurso de inversión transforma las circunferencias en circunferencias y las circunferencias en rectas.

Puntos inversos

El inicio de la construcción teórica puede hacerse partiendo del conocimiento y análisis de la definición de puntos inversos, luego, se plantean un grupo de interrogantes que traen como conclusión la obtención de consecuencias. Las consecuencias que se obtienen del análisis directo de la definición son importantes porque contribuya a formar en los alumnos el concepto de puntos inversos; constituyen bases para la construcción del resto de la teoría y además forman parte del procedimiento para detectar y construir parejas de puntos inversos. Estos aspectos son esenciales para determinar si es posible emplear la inversión en la solución de problemas matemáticos.

Después que los estudiantes conocen la definición de puntos inversos se puede proponer la resolución de diferentes problemas. A continuación, se ilustra con problema: dada la circunferencia $c(O, r)$ y un punto P, analizar la existencia y las posibles posiciones de las imágenes P' y P, teniendo en cuenta las distintas posiciones de P respecto a la circunferencia de inversión. ¿Cuántas imágenes poseen cada punto? ¿Tendrán imágenes iguales dos puntos distintos entre sí y distintos del centro de inversión? ¿Cuál será la imagen de P' que es imagen de un punto P?

Las respuestas a estas interrogantes conducen a consecuencias. Para la fundamentación solo se necesita la definición de puntos inversos y el trabajo con igualdades y desigualdades con números reales positivos.

Determinación de imágenes de puntos

Teniendo en cuenta los conocimientos que poseen los alumnos sobre a inversión, se desprende la necesidad de aprender a determinar al inverso de puntos dados. Para determinar la imagen de un punto por inversión existen muchos procedimientos, por lo que debemos estar atentos a las respuestas de los alumnos cuando se oriente esta actividad en el entrenamiento.

Además, se deben propiciar inquietudes en este sentido. En esta parte haremos alusión a otro (casos que pueden fundamentarse través de la semejanza de triángulos).

Para los casos que sean necesarios niveles de ayuda, a continuación, se relacionan relacionamos algunos aspectos a considerar: se cuenta como premisas con la definición de puntos inversos. Contenidos de la Geometría plana en la escuela; diferenciar los casos en que el punto al cual se le va a determinar la imagen sea interior o exterior a la circunferencia de inversión, e iniciar por el caso en que el punto sea exterior; utilizar la relación $\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OP}' = \mathrm{r}^2$ o transformarla.

Una conclusión de la primera relación puede ser, construir triángulos rectángulo donde OP sea la hipotenusa y r un cateto, por tanto OP' es la longitud de la proyección del cateto de longitud r sobre la hipotenusa OP. Esto permite localizar P'.

Una conclusión de la segunda relación puede ser, construir un triángulo isósceles de base r y lado OP; luego construir otro triángulo isósceles de lador semejante al primero. De esta construcción resulta que la base del segundo triangulo es OP', la cual da la posibilidad de localizar a P'. En este caso para la construcción de la imagen sólo se necesita un compás.

Con este tratamiento no sólo se está construyendo la teoría, sino que se están apoderando de procedimientos de trabajo que sirven tanto para construir las imágenes de puntos por inversión, como para identificar parejas de puntos inversos. Los estudiantes, a partir de responder las interrogantes planteadas, están desarrollando su creatividad, aun cuando sean necesarios niveles de ayuda, ya que se está construyendo su propia teoría. Además, es bueno destacar que los estudiantes con este tratamiento también están ampliando las posibilidades de los recursos que traen de la secundaria básica.

Debemos alertar a los profesores, sobre el tratamiento diferenciado. Con este fin sólo se debe dar a los estudiantes los impulsos que sean indispensables y únicamente a los le necesiten, pues el sistema de preguntas o inquietudes no pueden tener las mismas características a las que se hacen en las clases con estudiantes normales, las cuales conducen a los razonamientos uniformes, en la mayoría de los alumnos.

Curvas inversas y sus consecuencias

Un profesor con un grupo promedio iniciaría este epígrafe dando tratamiento a la definición de curvas inversas, lo que propiciaría un correcto y adecuado desarrollo del pensamiento lógico en los mismos, pues estamos en presencia de una definición nominal las cuales existen en los textos básicos de la enseñanza media. Teniendo en cuenta nuestro objetivo fundamental preferimos plantear un grupo de interrogantes que fomenten la necesidad de dicha definición. Por lo que se propicia un mayor desarrollo del pensamiento en los alumnos. Además, los prepara de manera general respecto a cómo deben proceder para construir sus propios conocimientos.

¿Cómo podrá caracterizarse el conjunto de puntos que resultan ser las imágenes de aquellos que se encuentran situados en una recta que pasa por el centro de inversión o en una circunferencia concéntrica a la de inversión?

En este proceso de análisis y descubrimiento se debe tener presente propiedades de esta transformación como son la de ser involutiva, la de los puntos invariantes al aplicar esta transformación y la colinealidad con el centro de inversión de un punto y su imagen. Este trabajo conduce a construir de manera deductiva las consecuencias a que se hace referencia en la teoría.

El hecho de tener que decir que el conjunto de puntos inversos de una recta que pasa por el centro de inversión, forma una recta; una circunferencia concéntrica a la de inversión se transforma en otra concéntrica también. Crea la necesidad de nominar este conjunto de puntos lo cual conduce a una definición "provisional" de curvas inversas, por inversión; lo de provisional está dado, porque los estudiantes no saben lo que va a ocurrir con el resto de las curvas, como son las rectas y circunferencias que no pasan por el centro de inversión.

Una vez que se tenga formado el concepto pueden plantearse las siguientes interrogantes: si la intersección de un conjunto de puntos con el conjunto de sus imágenes por inversión es no vacía, ¿qué se puede afirmar de la localización de estos puntos?, ¿cómo pudiera formularse el recíproco de esta proposición?

Inverso de rectas y circunferencias

Con el sistema de actividades planteadas anteriormente existe motivación y orientación para que los estudiantes se percaten de la necesidad de las propiedades que se enuncian en este parte. Para el caso de que se necesiten niveles de ayuda en la obtención de suposiciones, a continuación, se exponen elementos que a juicio de los investigadores son claves: diferenciar tres casos de acuerdo con la posición de la recta respecto a la circunferencia de inversión: que la recta corte a la circunferencia, que sea tangente o exterior; iniciar el proceso de investigación por una recta que sea exterior o tangente a la circunferencia de inversión.

De estos niveles de ayuda puede surgir la idea de que la imagen de una recta es una circunferencia, teniendo en cuenta que los puntos que son exteriores a la circunferencia de inversión sus imágenes son interiores; que los puntos más cercanos al centro de inversión tienen imágenes más alejadas del mismo. Esto puede ayudar a los alumnos a percibir que la imagen de la recta puede ser una curva cerrada y simétrica, respecto a la perpendicular a la pre-imagen que pasa por el centro de inversión. No cabe duda que estamos en una situación de aprendizaje creadora, en la que pueden surgir muchos criterios, al igual que para la demostración. El profesor debe tener presente que es oportuno brindar niveles de ayuda respecto a la propiedad de la inversión ya que es una transformación involutiva.

Conclusiones

Las recomendaciones metodológicas planteadas en la investigación permiten a los estudiantes una apropiación plausible de las definiciones, teoremas y procedimientos utilizando como base conocimientos de la Geometría Elemental incluida en el currículo de la enseñanza media cubana. También, expande las posibilidades de los recursos que posee tanto en habilidades como en conocimientos. Además, facilita un adecuado desarrollo del pensamiento, exige una correcta sistematización y apropiación de técnicas para construir conocimientos relacionados con el planteo y la resolución de problemas.

En las recomendaciones está implícita la intención de lograr la fiabilidad del pensamiento y desarrollar la imaginación geométrica. Para lograr este objetivo, se aprovechan las potencialidades que ofrecen las propiedades de la inversión matemática.

Referencias

Aldazabal Melgar, O. F., Vértiz Osores, R. I., Zorrilla Tarazona, E., Aldazábal Melgar, L. H., y Guevara Duarez, M. F. (2021). Software GeoGebra en la mejora de capacidades resolutivas de problemas de figuras geométricas bidimensionales en universitarios. *Propósitos y Representaciones, 9*(1).

Badillo Torres, V., y Rodríguez Abitia, G. (2021). Plataforma Virtual para el aprendizaje de la Geometría Analítica. *Revista Internacional De Pedagogía E Innovación Educativa, 2*(1), 123–138.

Carmenates Barrios, O. A., y Tarrío Mesa, K. (2019). El pensamiento lógico, psicológico y social: su contribución a la resolución de problemas geométricos. *Conrado, 15*(69), 362-369.

Figueroa, L. G. (2017). *Una transformación inspirada en la inversión respecto a la elipse*. http://hdl.handle.net/20.500.12209/9761.

González, F. (2020). La matemática y el arte en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría. En Balda, Paola; Parra, Mónica Marcela; Sostenes, Horacio (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* (pp. 368-379). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Molina, A. B., Arenas Díaz, J. E., y Pineda Ballesteros, E. (2019). El aprendizaje de la geometría con Geogebra, un enfoque de aprendizaje por problemas. *Revista Docencia Universitaria, 20*(2), 55–67.

Oliver, M., Valdez, G., Vecino, S., y Astiz, M. (2018). Complementando la formación geométrica de los futuros profesores. En Lestón, Patricia (Ed.), *Actas de la XII Conferencia argentina de educación matemática*, (pp. 1-8). http://funes.uniandes.edu.co/19553/

Roanes Lozano, E. (1993). *Automatización e implementación de algunos problemas algebráicos y geométricos.* [Tesis doctoral, Facultad de Informática (UPM)]. https://doi.org/10.20868/UPM.thesis.10113.

Rojas, R. (2020). Introducción del GeoGebra en el proceso de enseñanza–aprendizaje de Geometría a docentes en formación. *Revista Caribeña de Investigación Educativa, 4*(1). http://52.225.194.101/index.php/recie/article/view/174

Urrego Gómez, Y. (2021). *Propuesta metodológica para la enseñanza-aprendizaje de la geometría mediada por los conceptos de área y volumen a partir del estudio de los polígonos regulares en el gado sexto de la I. E.* Dinamarca. Universidad Nacional de Colombia.