Empleo de la visualización matemática en el proceso de planteo y resolución de problemas

The use of mathematical visualization in the process of posing and solving problems

Nolbert González Hernández[1]

Wilber Garcés Cecilio[2]

Luis Narciso Grimaldy Romay[3]

Resumen

En la investigación se evalúa el empleo de la visualización como principio heurístico en el proceso de enseñanza-aprendizaje del planteo y la resolución de problemas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la disciplina Análisis Matemático que se desarrolla en estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática de la Universidad de Holguín. La intervención se realizó en diez sesiones, se aplicó un pre-test y un post-test. Como resultado, se observa que el empleo de la visualización en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje del planteo y la resolución de problemas favorece y desarrolla habilidades relacionadas con este último proceso.

Palabras clave: visualización matemática, principio heurístico, planteo de problemas, resolución de problemas

Abstract

The research evaluates the use of visualization as a heuristic principle in the teaching-learning process of problem posing and solving in the teaching-learning process of the discipline Mathematical Analysis developed in students of the Bachelor's Degree in Mathematics

[1] Licenciado en Educación, Especialidad: Matemática-Física, Instructor, Universidad de Holguín, Cuba. E-mail: nolbertreblon@gmail.com ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9579-1073

[2] Licenciado en Educación, Especialidad: Matemática-Computación, Doctor en Ciencias Pedagógicas, Profesor Auxiliar, Universidad de Holguín, Cuba. E-mail: wilbergc@uho.edu.cu ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2883-9882

[3] Licenciado en Educación, Especialidad: Matemática, Profesor Auxiliar, Universidad de Holguín, Cuba. E-mail: grimaldy@uho.edu.cu ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5588-1587

Fecha de recepción: 03-01-2021 Fecha de aceptación: 22-04-2022

Education at the University of Holguin. The intervention was carried out in ten sessions, a pre-test and a post-test were applied. As a result, it is observed that the use of visualization in the development of the teaching-learning process of problem posing and solving favors and develops skills related to the latter process.

Keywords: mathematical visualization, heuristic principle, problem posing, problem solving

Introducción

La resolución de problemas es un tema de suma importancia dentro de la Matemática y su enseñanza. Informes científicos y metodológicos de trascendencia mundial ponderan esta relevancia, como en el caso de los Principios y Estándares para la Educación Matemática, del Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos (NCTM, 2003). La resolución de problemas permite desarrollar el pensamiento, justifica la importancia de la Matemática e introduce y fija nuevos procedimientos relacionados con contenidos matemáticos en los sujetos que intentan darle solución al problema.

Con ayuda de conocimientos básicos del saber matemático, ya es posible enfrentar el proceso de resolución de problema. Tanto en niveles elementales, como en niveles superiores, la resolución de problemas puede estar acompañada por una especie de par dialéctico, consistente en el planteo de nuevos problemas. En este sentido, Cruz (2002) plantea que ‘‘el hallazgo de nuevos problemas es una etapa cualitativamente superior de los procesos de resolución de problemas’’ (p. 5). Asimismo, Kilpatrick (1987) sugiere que ‘‘la experiencia de descubrir y crear sus propios problemas de matemáticas debe ser parte de la educación de cada estudiante’’ (p. 123), destacando la importancia del planteo de problemas dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

En el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática se presentan situaciones que favorecen el planteamiento de nuevos problemas. Por este motivo, muchos investigadores han abordado temáticas relacionadas con la necesidad de crear estas situaciones que permitan plantear los problemas desde una perspectiva diferente y que revelen nuevas formas de darle solución a los problemas. Para cumplir estos objetivos "existen de hecho muchas estrategias diferentes, cada una de ellas usadas para crear problemas desde otros problemas o situaciones" (Brown y Walter, 1993, p. 22).

Las estrategias referidas por estos autores, pueden ser usadas para plantear un mismo problema desde diferentes aristas, de modo que al añadir y/o eliminar condiciones se pueden generar nuevos problemas los cuales, en ocasiones, ayudan a darle solución al problema original. Una de estas estrategias es la ampliamente generalizada "¿Qué-si-no?" propuesta originalmente por Brown y Walter (1983), donde se describe el uso de la pregunta heurística de tipo ¿Y si…?, cuyo empleo posibilita un análisis profundo de los problemas a resolver. Además, permite ir añadiendo o suprimiendo condiciones al problema inicialmente planteado, lo que propicia el desarrollo de habilidades en el proceso de reformulación y resolución de problemas. De esta forma se propicia una mayor motivación y comunicación entre los sujetos que intervienen en dicho proceso.

En el modelo profesional para el "Plan de Estudio E" de la carrera de Educación Matemática elaborado en el año 2016 por la Comisión Nacional de Carrera, se resume entre otros aspectos, los objetivos generales de la carrera. De modo particular, el objetivo número diez expresa la necesidad de

> enseñar a formular y resolver problemas relacionados con diferentes aspectos de la realidad económica, política y social y donde se manifiestan las relaciones ciencia-

tecnología-sociedad-ambiente, utilizando contenido de la matemática, sobre la base de la aplicación de procesos de pensamiento, procedimientos y estrategias de trabajo y aprovechamiento de las tecnologías de la información y las comunicaciones. (MES, 2016, p. 11)

De esta forma, se señala la necesidad de desarrollar en los estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática habilidades y procedimientos para favorecer el proceso de planteo y resolución de problemas.

Considerando la importancia de esta temática, el presente trabajo se centra en analizar los fundamentos teóricos y metodológicos de los procesos de planteo y resolución de problemas. Así como, evaluar el empleo de la visualización matemática como principio heurístico en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje del planteo y la resolución de problemas. De acuerdo con lo anterior, se diseña e implementa una estrategia de enseñanza para darle tratamiento al concepto de diferenciabilidad de funciones reales de varias variables reales mediante el empleo de la visualización, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de este contenido.

La estrategia se aplica en el desarrollo del programa de la asignatura "Análisis Matemático II" para la carrera Licenciatura en Educación Matemática de la Universidad de Holguín; para abordar el siguiente objetivo: analizar el empleo de la visualización como principio heurístico en el proceso de enseñanza-aprendizaje que se desarrolla en la asignatura Análisis Matemático II en estudiantes del segundo año de la licenciatura, antes y después del uso de la estrategia.

Desarrollo

Fundamentos epistemológicos del proceso de enseñanza-aprendizaje del planteo y resolución de problemas en la formación de profesores de Matemática

El proceso de enseñanza-aprendizaje, es definido por Bermúdez y Pérez (2004) como

> un proceso de interacción entre el maestro y los alumnos mediante el cual el maestro dirige el aprendizaje por medio de una adecuada actividad y comunicación, facilitando la apropiación de la experiencia histórico-social y el crecimiento de los alumnos y del grupo, en un proceso de construcción personal y colectiva. (p. 6)

Este proceso es considerado el eslabón fundamental para transmitir la cultura creada y almacenada por la humanidad a lo largo de todo su desarrollo.

En particular, en investigaciones educativas relacionadas con la Matemática, el proceso de enseñanza-aprendizaje del planteo y la resolución de problemas ha sido abordado con interés y preocupación. Con el objetivo de profundizar en este proceso se hace necesario analizar las definiciones del concepto de problema dadas por diferentes autores, y con base en diferentes posturas científicas.

Bajo una mirada didáctica, el concepto de problema es comprendido como una situación relacionada con un determinado objeto o fenómeno, que provoca en el sujeto una necesidad relacionada con las propiedades y relaciones de ese objeto. Sin embargo, el sujeto no dispone de recursos que permitan dilucidar la situación, o al menos concebir una idea aproximada de los recursos necesarios para conseguirlo. Varios autores han significado esta perspectiva. Por ejemplo, Álvarez (1984) lo define de la siguiente manera: “el problema es el punto de partida para que en su solución el estudiante aprenda a dominar la habilidad y se apropie del conocimiento” (p. 134). Este autor considera al problema como un componente del proceso de enseñanza-aprendizaje que se desarrolla de manera general y se materializa en la tarea docente.

De forma similar, Campistrous y Rizo (1996) declaran que problema es "toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarla. Se añade como condición que la vía de pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer realizar la transformación" (p. 9). Ambas definiciones tienen varios puntos de convergencia en el significado que se le atribuye a los términos utilizados. Se asume que un problema es una situación que se le manifiesta a un sujeto, el cual no encuentra una solución inmediata ya que no tiene un procedimiento específico para dilucidarla y, además, el sujeto tiene necesidad de encontrar una solución. Por tanto, puede afirmarse que esta perspectiva concibe el concepto de problema desde el punto de vista didáctico.

Lo anterior también evidencia que el concepto de problema es un concepto relativo al sujeto que intenta resolverlo. Por tanto, lo que constituye un problema para un determinado sujeto puede no serlo para otro. Incluso, lo que en algunas situaciones constituye un problema para un sujeto puede dejar de serlo en un futuro, si se le presentan situaciones con algunas similitudes a las anteriores, donde ya posee un determinado algoritmo u otro recurso para su solución.

En psicología el concepto de problema ha sido estudiado en profundidad y es un concepto definido de manera similar por varios autores: Rubinstein (1966), Labarrere (1988), Albarrán et al. (2005), Herrera et al. (2018), entre otros. Estos investigadores han significado la importancia de la actividad cognoscitiva que el sujeto debe desplegar para su resolución, así como la disposición o motivación por llevar a cabo la misma. Por tanto, los aportes más significativos residen en la explicación de la subjetividad, como componente esencial de los problemas, manifestada en el carácter individual y en la relatividad de los mismos.

Para Polya (1965), tener un problema significa buscar en forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable en forma inmediata. Asimismo, Schoenfeld (1985) utiliza la palabra problema para referirse a una tarea matemática que resulta difícil de resolver para el individuo que la enfrenta. Para este autor un problema no es inherente a una tarea matemática, más bien es una relación particular entre el individuo y la tarea.

Cruz (2002) plantea que un problema es "aquella situación que se caracteriza por la existencia de una persona (o grupo) que desea resolverla, de un estado inicial y otro final, y de algún tipo de impedimento para el paso de un estado a otro" (p. 21). A criterio de este investigador una tarea se convierte en problema cuando "se experimenta un desarrollo cognitivo al pasar de un estado inicial a un estado final, al trabajar sobre la zona de desarrollo próximo del sujeto" (p. 21). Destaca así tres significados implícitos del concepto de problema, desde el punto de vista psicológico: el de meta que se desea alcanzar, el de obstáculo o conflicto que se debe superar y el de tener sentido, para la persona que lo enfrenta.

Álvarez y Cruz (2021) sugieren que la meta no consistirá solo en hallar los resultados del problema, sino también en identificar, argumentar y contrastar diferentes métodos de solución, generar nuevas preguntas, conjeturas y/o problemas y evaluar las posibilidades de transferencia de los conocimientos y experiencias adquiridas a la resolución de estos y otros problemas. De este modo, y de forma simultánea, se construyen los modos de actuación para desarrollar de manera más eficaz esta actividad en futuros escenarios similares de resolución de problemas.

Beyer (1998) analiza definiciones del concepto de problemas dadas por investigadores de diferentes ramas científicas (pedagogos, psicólogos, matemáticos, físicos, etc.), con el objetivo de caracterizar el término problema. Como resultado, expone la necesidad de clarificar lo que se entiende por problema y analiza el vínculo de los problemas con herramientas didácticas y con la historia de las matemáticas. Este autor encuentra elementos comunes en las definiciones analizadas y que caracterizan un problema en matemática: "Obstáculo, dificultad, reto; razonamiento, pensamiento reflexivo; desconocimiento de la solución por parte del alumno y que esta no depende de disponer de un algoritmo que las genere inmediatamente" (Beyer, 1998, p. 5).

En la presente investigación se asume la definición de problema matemático dada por Álvarez y Cruz (2021), quienes lo caracterizan como toda situación en la cual, dada determinadas condiciones, se plantean ciertas exigencias que crean en el sujeto (o en el grupo) el deseo y la necesidad de realizar una intensa actividad cognoscitiva, poniendo en acción sus recursos matemáticos y personológicos para poder satisfacerlas, aun cuando no se conoce vía alguna para ello.

Para estos autores, una situación problémica entraña ciertas interrogantes para las que no se tiene respuesta, pero no se transforma en problema hasta que el sujeto quiere o siente la necesidad de resolverla y pone en marcha procesos de reflexión y de toma de decisiones sobre la secuencia de pasos a seguir (Álvarez y Cruz, 2021). Además, afirman que una tarea planteada por el docente no es realmente un problema para los estudiantes hasta que no lo interpretan y lo reformulan para sí. El docente debe tener en cuenta las características individuales de los estudiantes y del grupo ya que una tarea puede constituir un problema en un momento determinado y en otro no, al igual que puede ser un problema para un estudiante y para otros no.

De lo anterior puede asumirse que una tarea docente constituirá un problema, en dependencia de los conocimientos matemáticos que posea el sujeto que la resuelve, y en la medida en que este asume la necesidad de dilucidar la situación. Cuando el alumno no ha asimilado o no ha comprendido el problema, todavía no es un problema para él, pero la situación no deja de ser un problema para el grupo de estudiantes e incluso para él en un sentido potencial. Esto se debe a que el concepto de problema tiene, desde una mirada didáctica, un sentido marcadamente contextual, temporal y relativo.

La noción de proceso de resolución de problemas es utilizada por matemáticos, físicos, psicólogos, pedagogos, etc., y no se limita solo al ámbito científico, sino que es mucho más amplio. A diario es necesario enfrentar problemas, por lo que resolverlos implica desplegar acciones que demandan de una actividad cognitiva. En esencia, no se trata de una actividad rutinaria. En relación a ello Labarrere (1988) plantea: “la solución de un problema no debe verse como un momento final, sino como todo un complejo proceso de búsqueda, encuentros, avances y retrocesos en el trabajo mental” (p. 86). Este autor rompe con la idea de que sea una actividad basada en la repetición de estrategias ya asimiladas y afirma que se trata de un proceso de alto nivel cognoscitivo.

Polya (1979) identifica cuatro etapas en el proceso de resolver un problema, cada una acompañada de una serie de preguntas y recomendaciones. Para este autor en la resolución de problemas es importante el uso de la heurística, por lo que el profesor debe ayudar a sus alumnos a desarrollarla. Para Alfaro (2006), el enfoque de Polya “se basa en una perspectiva global y no restringida a un punto de vista matemático. Es decir, este autor plantea la resolución de problemas como una serie de procedimientos que, en realidad, utilizamos y aplicamos en cualquier campo de la vida diaria” (Alfaro, 2006, p. 1).

Las etapas demarcadas por Polya (1979) son las siguientes:

1. Comprender el problema. En esta etapa se construyen ideas sobre de qué se trata la situación y se establecen los elementos fundamentales. Por ejemplo, qué es lo dado y a dónde se quiere llegar. Aquí se determinan la incógnita, los datos, las condiciones, y también se decide si

las condiciones son suficientes, necesarias, no redundantes ni contradictorias, entre otros aspectos.

2. Trazar un plan. Esta etapa surge con el establecimiento de cierta área de búsqueda, principalmente de relaciones y dependencias. Las experiencias y conocimientos previos sirven de soporte para el plan, de modo que el razonamiento analógico es esencial.

3. Poner en práctica el plan. Con ello se concreta la ejecución de lo establecido en la etapa anterior. De mucha importancia es la coherencia en cada paso y su logicidad, así como su debida fundamentación.

4. Mirada perspectiva y retrospectiva. Aquí se confronta lo que se pide y el resultado concreto que se ha obtenido, se revisan los pasos y las fundamentaciones, se analiza la posibilidad de mejorar los caminos de solución con ideas más sintéticas. También se mira hacia adelante, en el sentido de analizad si la solución es aplicable en una clase más amplia de problemas, si el resultado sirve de propiedad a utilizar en otras situaciones, entre otros aspectos.

Los trabajos de Polya tuvieron continuidad con Schoenfeld (1985), quien propuso actividades de resolución de problemas para el aula, las cuales favorecieran el surgimiento de situaciones semejantes a las condiciones que se experimentan en un escenario que él denomina microcosmos matemático. Schoenfeld plantea que la heurística de Polya no es aplicable a todos los problemas matemáticos en general, por lo que su propósito fundamental, fue investigar por qué las ideas de Polya no daban resultados o por qué estas ideas no eran consideradas como guía en los entrenamientos de los estudiantes que participarían en diversas competencias matemáticas (Santos, 1992).

Schoenfeld añade tres componentes más, aparte de la heurística, para el proceso de resolución de problemas: los recursos cognitivos como conocimientos matemáticos generales con los que cuenta el resolutor; la heurística, conformada por estrategias y técnicas para resolver problemas que el estudiante conoce y está en condiciones de aplicar; el control, como capacidad de utilizar lo que se sabe para lograr un objetivo, y también para monitorear y evaluar el proceso; y el sistema de creencias, lo cual comprende aquellas ideas o percepciones acerca de la matemática, que afectan los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación de dicha disciplina.

Se puede afirmar que ambos autores (Polya y Schoenfeld), aunque dan nombres distintos a sus fases, en esencia plantean un enfoque similar, aunque divergen en el modo en que desarrollan cada fase. Polya presenta lo que él denomina "Breve Diccionario de Heurística", como un compendio de sugerencias que resultan útiles en la resolución de problemas, con base en su experiencia. Schoenfeld basa sus etapas en estudios experimentales con estudiantes de talento matemático, donde pondera aspectos de orden didáctico provenientes de la psicología cognitiva.

Posterior a los trabajos clásicos de Polya y Schoenfeld, se han establecido varios modelos que son herederos de sus propuestas pioneras en el campo de la resolución de problemas (Carmenates et al., 2014). Estos modelos ofrecen un modo sistemático en el proceso de resolución, siguiendo las siguientes fases: análisis del problema, planteamiento de una estrategia de resolución, ejecución de la estrategia y análisis de los resultados (Mettes et al., 1980; Fajardo, 2020).

Por otra parte, la importancia del planteo de problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática ha sido reconocida en investigaciones nacionales (Cruz, 2002; 2019; 2020; Cruz et al., 2016; Cruz et al., 2020; González, 2001; Labarrere, 1980; 1988) y extranjeras (Silver, 1994; Baumanns y Rott, 2021; Cai y Hwang, 2020; English, 2019), donde se revela una conexión directa entre este proceso y el proceso de resolución de problemas. Además, en la vida real, a menudo los problemas deben ser creados o descubiertos por el solucionador, lo cual evidencia una relación directa con los procesos creativos, ponderando la complejidad inherente a un estudio integral de estos procesos. Por lo tanto, la responsabilidad de identificar un problema y posteriormente formularlo de manera productiva recae en el solucionador (Kilpatrick, 1987).

Empleo de la visualización en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje del planteo y la resolución de problemas

En la presente investigación se le ha dado importancia al empleo de la visualización matemática en el planteo y resolución de problemas. Tal y como plantean los modelos de resolución de problemas el análisis en una primera etapa está centrado en "comprender el problema". Una vez concluida esa etapa, se supone que el alumno puede elaborar un plan para resolver el problema; la realidad ha mostrado lo contrario: no importa que tan claro esté el lenguaje utilizado en el problema, los estudiantes en su mayoría no son capaces de determinar lo que hay que hacer para resolverlo una vez cumplida esa etapa. No es extraño entonces encontrarse con comentarios como: "Sí, entiendo el problema, pero… ¿qué hay que hacer?

Alrededor de esto, la visualización matemática puede ayudar en la interpretación de la información expresada en el problema, en la representación mental o materializada de esta información y en la búsqueda de las relaciones existentes entre la información que se brinda y lo que se debe buscar (Figueiras y Deulofeu, 2005; Arteaga et al., 2020). Identificar las relaciones entre la información es crítico en este proceso mental, ya que no sólo se debe comprender cada parte de información como datos independientes, sino que se debe construir una relación entre estos datos. Todo esto es posible a través del proceso de visualización.

En este sentido, varios autores se han dedicado al estudio del empleo de la visualización en el proceso de planteo y resolución de problemas, determinando que la visualización es un principio heurístico en la enseñanza de la Matemática. En este sentido enriquece la didáctica de la matemática, adquiere un carácter rector en el proceso de enseñanza-aprendizaje y desarrolla la independencia cognoscitiva de los conocimientos adquiridos. Además, se afirma que la visualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje del planteo y la resolución de problemas ocupa una posición central (Cruz et al., 2020; Rojas, 2009).

Método

La investigación es de tipo cuasi-experimental y con diseño longitudinal (Hernández-Sampieri et al., 2014). Se considera la aplicación de una estrategia de intervención en el aula y la aplicación de un test antes de la intervención y otro posterior a ella, ambos fueron validados por un Comité de Expertos. La muestra estuvo formada por 25 estudiantes de diferentes grupos de la carrera Licenciatura en Educación Matemática de la Universidad de Holguín. Pre- Test y Post-Test

Resultados empíricos del empleo de la visualización matemática en el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje del planteo y la resolución de problemas: para el tratamiento del concepto de función real de varias variables reales, diferenciables en un punto se construye un cuerpo teórico que consta de la definición, dos teoremas que son condiciones necesarias y uno que es condición suficiente:

Para una función $f\colon AcR^n \rightarrow R$, con A conjunto abierto y $x\epsilon A$. Se dice que f es diferenciable en x, si existe una función $g(x)$ definida de $R^n \rightarrow R$, que es lineal y además que existe una vecindad $V(O)$ en R^n tal que para todo $h \in V^*(O)$ se cumple que:

$$f(x+h) - f(x) - g(x,h) = O(h)$$

y se precisa que esta última expresión significa que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-g(x,h)}{|h|}=0$$

Bajo estas condiciones iniciales para la definición de la función f se enuncian condiciones necesarias una que relaciona la diferenciabilidad de la función f en el punto x∈A con la existencia de las derivadas parciales y se plantea que:

$df(x,h)=\sum_{k=1}^{n} D_k f(x)\cdot\ h_k$ donde $h=(h_1,h_2,\dots h_n)$

y otro que relaciona la diferenciabilidad de la función f en el punto x∈A, con la continuidad de f en ese punto. Por último, se plantea una condición suficiente que relaciona la existencia de las derivadas parciales y su continuidad en el punto x∈A con la diferenciabilidad de la función en dicho punto.

Una vez conformado todo el cuerpo teórico se plantearon cinco ejercicios para analizar la diferenciabilidad de la función f en un punto dado. Estos ejercicios contenían diferentes niveles de dificultad y no siempre se podía concluir la diferenciabilidad de la función en el punto indicado a partir de los contra-recíprocos de las condiciones necesarias o de la condición suficiente de diferenciabilidad, es decir:

1. En un primer ejercicio la función no era continua en el punto que se indicaba.

2. En un segundo ejercicio no existían al menos una de las derivadas parciales en el punto indicado.

3. En un tercer ejercicio la función era continua, existían todas las derivadas parciales y eran continuas en el punto dado.

4. En los ejercicios cuatro y cinco las funciones eran continuas, existían todas sus derivadas parciales, pero estas no eran continuas en el punto que se indicaba.

El estudio se realizó en tres grupos cuyas matrículas eran 8, 5 y 12 estudiantes respectivamente. Los resultados que se obtuvieron se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1

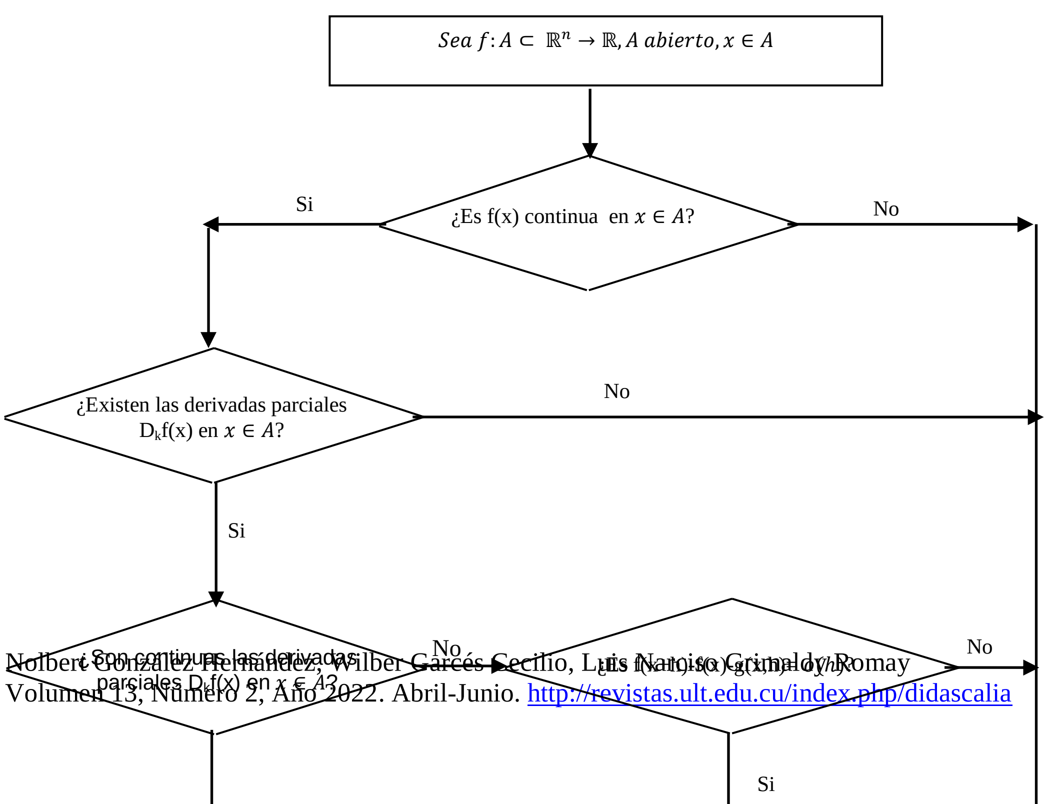
Tabla de resultados

Ejercicios	**No responde**	**Responde parcialmente**	**Responde incorrectamente**	**Responde correctamente**
1	4	8	7	6
2	8	10	3	4
3	7	6	5	7
4	9	4	10	2
5	7	3	14	1

En este primer momento, y de acuerdo a los resultados obtenidos, se revela que los estudiantes presentan dificultades en la integración de los conocimientos precedentes y con el cuerpo teórico que sustenta el análisis de la diferenciabilidad de funciones reales de varias variables reales en su punto dado. Las mayores dificultades se presentan en la aplicación del teorema que constituye la condición suficiente, cuando las derivadas parciales no son continuas. Los resultados expuestos en la tabla, no son de conocimiento de los estudiantes, por el momento.

Figura 1

Esquema para determinar la diferenciabilidad en un punto de funciones reales de dos variables reales



A partir de las insuficiencias detectadas se plantea el problema de construir un diagrama que ilustre el procedimiento para el análisis de la diferenciabilidad en un punto de las funciones reales de varias variables reales. Este diagrama se construye por vía heurística apoyándose en el cuerpo teórico construido a lo largo del desarrollo del tema (Figura 1).

Una vez construido el diagrama, se propuso a los estudiantes realizar el análisis de las soluciones dadas a los ejercicios planteados con anterioridad. Se obtuvieron los siguientes resultados (Tabla 2).

Tabla 2

Tabla de resultados

Ejercicios	No responde	Responde parcialmente	Responde incorrectamente	Responde correctamente
1	2	3	2	18
2	4	2	0	19
3	3	2	1	19
4	3	4	4	14
5	3	3	3	16

Estos resultados evidencian que los estudiantes elevaron notablemente la interpretación del sistema de conocimientos que sustentan la formación del concepto. A la pregunta: ¿Consideras que el diagrama te ha ayudado a analizar la diferenciabilidad de una función en un punto?, 18 estudiantes respondieron que sí, 5 respondieron que en parte y dos respondieron que no.

Conclusiones

El empleo de la visualización en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en general y en el planteo y resolución de problemas en particular ayuda a modificar el esquema de enseñanza algebraico tradicional inculcando a los estudiantes y favorece la aprehensión del conocimiento. Además, la visualización matemática como método heurístico permite dinamizar el proceso docente que se desarrolla en Matemática acorde con las exigencias educativas actuales. Por lo que, los conceptos matemáticos se plasman de una manera intuitiva buscando siempre el conocimiento matemático y el rigor, así se consigue transmitir las ideas de una forma adecuada y precisa.

La explicación a estos resultados, hipotéticamente, es que nos apropiamos del conocimiento cuando este es impartido de una forma que involucre a todos los integrantes del proceso docente. La poca frecuencia con que se interpretan las propiedades, relaciones, etc. visualizando mediante tareas docentes impide que regularmente los alumnos no puedan interpretar los resultados y que al apoyarse plenamente en recursos algebraicos no son conscientes de lo que representan los resultados obtenidos. Urge que los profesores utilicen métodos que permitan a sus estudiantes visualizar y comprobar sus resultados dándole un significado concreto a los conocimientos matemáticos.

Referencias

Albarrán, J., Suárez, C., González, D., Bernabeu, M., Villegas, E., Rodríguez, E. y Ledesma, D., J. (2005). *Didáctica de la Matemática en la Escuela Primaria*. Pueblo y Educación.

Alfaro, C. (2006). Las ideas de Polya en la resolución de problemas. *Cuadernos*, *1*, 1-13.

Álvarez, C. (1984). *Fundamentos teóricos de la dirección del proceso de formación del profesional de perfil ancho*. Pueblo y Educación.

Álvarez, M., y Cruz, M. (2021). La estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática sobre la base de problemas. En: Col. Aut., *Metodología de la Enseñanza de la Matemática* (tomo 2). Editorial Pueblo y Educación.

Arteaga, M., Macías, J. y Pizarro, N. (2020). La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias meta-cognitivas de estudiantes de secundaria. *Unicencia, 34*(1).

Baumanns, L., & Rott, B. (2021). Rethinking problem-posing situations: A review. *Investigations in Mathematics Learning*, *13*(2), 59-76.

Bermúdez, R. y Pérez, L. (2004). *Aprendizaje formativo y Crecimiento personal*. Editorial Pueblo y Educación.

Beyer, W. O. (1998). Algunas precisiones acerca de la resolución de problemas y de su implementación en el aula. *Paradigma*, *19*(1), 39-55.

Brown, S.I. & Walter, M.I. (1993). *Problem Posing: Reflections and Applications*. Laurence Erlbaum Associates.

Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, *102*, 101391.

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Editorial Pueblo y Educación.

Cruz, M. (2002). Estrategia Metacognitiva en la Formulación de Problemas para la Enseñanza de la Matemática. Tesis doctoral no publicada. Instituto Superior Pedagógico José de la Luz y Caballero.

Cruz, M. (2019). Aprendiendo a plantear nuevos problemas. Una experiencia con GeoGebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *32*(1), 468-477.

Cruz, M. (2020). Planteo analógico de problemas matemáticos. Descubriendo relaciones entre el teorema de Walter y el de Morley. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(1), 175-185.

Cruz, M., García, M. M., Rojas, O. J., Sigarreta, J. M. (2016). Analogies in mathematical problem posing. *Journal of Science Education*, *17*(2), 84-90.

Cruz, M., Rojas, O. y Avelina, B. (2020). Establecimiento de analogías durante el planteo de problemas matemáticos. Reflexiones para el contexto escolar. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (59), 180-203.

English, L. D. (2020). Teaching and learning through mathematical problem posing: Commentary. *International Journal of Educational Research*, *102*, 101451.

Fajardo, A. (2020). Influencia de las creencias de los estudiantes en la resolución de problemas en Educación Matemática. *Revista de Educación Matemática*, *35*(3), 21-36.

Figueiras, L. y Deulofeu, J. (2005). Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, *23*(2), 217-226.

Carmenates, O.A., Rodríguez, M. y Gamboa, M.E. (2014). Recursos didácticos para favorecer la resolución de problemas matemáticos. En S. Lima (Ed.), *Didácticas de las Ciencias. Nuevas perspectivas (5)*, (pp. 11-38). La Habana: Sello Editor Educación Cubana.

González, D. (2001). La superación de los maestros primarios en la formulación de problemas matemáticos. Tesis de doctorado. Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona.

Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C. y Baptista-Lucio, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. McGraw-Hill.

Herrera, S. C., Espinosa, M. E., Saucedo, M. y Díaz, J. J. (2018). Solución de problemas como proceso de aprendizaje cognitivo. *Revista Boletín Redipe*, *7*(4), 107-117.

Kilpatrick, J. (1987). Formulating the problem: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive Science and Mathematics Education (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Labarrere, A. (1988). *¿Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas?* Pueblo y Educación.

Labarrere, A. (1980). Sobre la formulación de problemas matemáticos por los escolares. *Revista Educación*, (6), 65-75.

MES (2016). Modelo del profesional (E). Carrera de Licenciatura en Educación Matemática.

Mettes, C., Pilot, A., Roosink, J., & Kramers, H. (1980). Teaching and learning problem solving in Science. Part I: A general strategy. *Journal of chemical education*, *57*(12), 882-885.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Polya, G. (1965). *Mathematical discovery*. Wiley.

Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.

Rojas, O. (2009). Modelo didáctico para favorecer la enseñanza- aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador. Tesis doctoral. Instituto Superior Pedagógico José de la Luz y Caballero.

Rubinstein, S. (1966). *El proceso del pensamiento*. Editora Universitaria.

Santos, L. M. (1992). Resolución de Problemas; El Trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Educación matemática*, *4*(2), 16-24.

Shoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Silver, E.A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 19-28.