

LA VISUALIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA. SU EMPLEO MEDIANTE EL USO DEL GEOGEBRA

EMPLEO DE LA VISUALIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

AUTORES: Nolbert González Hernández ¹

Wilber Garcés Cecilio²

Luis Narciso Grimaldy Romay³

DIRECCIÓN PARA CORRESPONDENCIA: nolbertreblon@gmail.com

Fecha de recepción: 24-05-2021

Fecha de aceptación: 29-10-2021

RESUMEN

El objetivo de la investigación es evaluar el impacto de una intervención de aula aplicada en el proceso de enseñanza aprendizaje de las curvas de segundo grado que se desarrolla en la carrera de Licenciatura en Educación Matemática de la Universidad de Holguín. En la intervención la visualización asume el papel de principio heurístico y se dinamiza el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática mediante el empleo de recursos creados con el software GeoGebra. La intervención se realizó en cinco sesiones de trabajo y se aplicó un pre test y un post test con la finalidad de constatar los resultados de la misma, ambos fueron validados por un Comité de Expertos. Como resultado, se observa un desarrollo de las habilidades necesarias para la comprensión de los conceptos relacionados con las curvas de segundo grado por parte de los estudiantes. Además, se logran resolver problemas relacionados con este contenido mediante un planteo dinámico de los mismos apoyado en el empleo del software Geogebra.

PALABRAS CLAVE

Visualización; Educación Matemática; Principio Heurístico; Representaciones Semióticas.

VISUALIZATION IN THE TEACHING OF MATHEMATICS. IT'S USE THROUGH THE IMPLEMENTATION OF GEOGEBRA.

ABSTRACT

The objective of the research is to evaluate the impact of a classroom intervention applied in the teaching-learning process of second grade curves developed in the course of Bachelor in Mathematics Education at the University

¹ Licenciado en Educación, Especialidad: Matemática Física, Instructor, Universidad de Holguín, Cuba, nolbertreblon@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9579-1073>

² Doctor en Ciencias Pedagógicas, Profesor Auxiliar, Universidad de Holguín, Cuba, wilbergc@uho.edu.cu

³ Máster, Profesor Auxiliar, Universidad de Holguín, Cuba, grimaldy@uho.edu.cu

of Holguin. In the intervention, visualization assumes the role of heuristic principle and the teaching-learning process of Mathematics is dynamized through the use of resources created with GeoGebra software. The intervention was carried out in five work sessions and a pre-test and a post-test were applied in order to verify the results of the intervention, both of which were validated by a Committee of Experts. As a result, a development of the necessary skills for the understanding of the concepts related to the curves of second degree by the students is observed. In addition, problems related to this content are solved by means of a dynamic approach supported by the use of Geogebra software.

KEYWORDS

Visualization; Mathematics Education; Heuristic Principle; Semiotic Representations.

INTRODUCCIÓN

En la enseñanza de la Matemática ha predominado una tendencia denominada “Matemática Moderna” en la que se brinda mayor importancia al uso de los procedimientos algebraicos por encima de los visuales. No obstante, en las últimas dos décadas, el empleo de la visualización en el pensamiento matemático es objeto de estudio de numerosas investigaciones debido, principalmente, al desarrollo de las herramientas tecnológicas como recurso didáctico (Arcavi, 2003; Cantoral y Montiel 2001; Figueiras y Deulofeu, 2005; Duval, 2003, 2006; Gómez 2012; Escrivá, Jaime y Gutiérrez, 2018; Nápoles y Rojas 2020).

En consecuencia, la visualización asume un papel protagónico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática actual. Su empleo dota de significado a situaciones problémicas planteadas, en las que se pueden desplegar diferentes niveles de visualización (Figueiras y Deulofeu, 2005). Además, se destaca la utilidad del empleo de la visualización en el proceso de planteo y resolución de problemas matemáticos (Duval, 2011), obteniéndose mejores resultados cuando se utilizan recursos tecnológicos en su tratamiento, lo que permite identificar patrones numéricos; entre figuras; de movimiento y de comportamientos de relaciones (Ruiz y Elena, 2013).

Dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática un tema importante es el del estudio de las llamadas curvas cónicas o de segundo grado. Estas curvas son el resultado de la intersección de un plano α a una superficie cónica de revolución, la sección producida se denomina superficie cónica, y su contorno es una curva plana de segundo grado. El empleo de la visualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje de este contenido resulta favorable para que los estudiantes partiendo de las definiciones de cada curva de segundo grado, deduzcan su correspondiente expresión algebraica, así como, logren la representación gráfica de ellas a partir de esta representación algebraica.

La enseñanza de este contenido bajo un enfoque algebraico y una visión estática limita su aprendizaje. Por lo tanto, este debe ser impartido desde una perspectiva mixta (algebraica y visual) y dinámica. De esta forma, se emplea la visualización matemática y se promueve una interacción entre las representaciones (gráficas o por símbolos), logrando una mejor comprensión de los objetos matemáticos involucrados (Hitt, 1996). Por otro lado, las nuevas tecnologías han impactado en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática a diferentes niveles educacionales (Arancibia, Cabero y Marín 2020; Grisales, 2018) Además, la existencia de software que constituyen recursos didácticos para la enseñanza de la Matemática en general y de las curvas de segundo grado en particular, permite desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje en un entorno dinámico.

De acuerdo con lo anterior, se diseña e implementa una propuesta de enseñanza de las curvas de segundo grado (elipse, hipérbola, parábola) apoyada en el software matemático GeoGebra. La estrategia se aplica en el desarrollo del programa de la asignatura “La informática y la Gestión del Conocimiento” para la carrera Licenciatura en Educación Matemática de la Universidad de Holguín; para abordar el siguiente objetivo: analizar el empleo de la visualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las curvas de segundo grado en estudiantes del segundo año de la licenciatura, antes y después del uso del software GeoGebra.

DESARROLLO

Representación semiótica de Duval

Duval (1994) describe dos tipos de representaciones: las mentales y las semióticas. La primera abarca las imágenes y las concepciones que tiene el individuo sobre un objeto matemático. Las semióticas están compuestas por signos de un sistema de representación, lo que limita de cierta forma su resultado. Estas dos representaciones mentales permiten estudiar el proceso de comprensión de los objetos, relaciones y operaciones de la Matemática en general.

Duval (2004) refiere que las representaciones semióticas pertenecen a sistemas que tienen su propia estructura, sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento y que pueden ser caracterizadas en función a las actividades cognitivas que despliegue el estudiante. De este modo, este autor afirma que las representaciones son necesarias tanto para fines de comunicación como para el desarrollo de actividades cognitivas del pensamiento. Además, plantea que en la formación de una representación se deben considerar dos aspectos esenciales: la selección de la representación y su empleo. Ambos aspectos de una representación se rigen por reglas de formación, detalladas a continuación:

La conversión. Se refiere a la transformación de una representación de una forma a otra. Por ejemplo, la representación algebraica de una curva de segundo grado puede ser representada en un sistema de coordenadas cartesianas en R^2 . En esta representación gráfica no cambia el concepto de la

curva de segundo grado que se está representando, solo cambia su forma de representación.

El tratamiento. Se refiere a una transformación que se realiza dentro de una misma forma de representación (Duval, 1999). Por ejemplo, la elipse puede ser representada de la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ o su equivalente a partir de desarrollar esta expresión donde se obtiene $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$.

Visualización en la enseñanza de la Matemática

Diversos autores plantean que la visualización es de gran importancia en el estudio de la Matemática. Observando una representación gráfica de un objeto matemático pueden surgir en los estudiantes una variedad de preguntas vinculadas a los cambios de representaciones semióticas. La visualización en matemática desde una postura didáctica difiere de la concepción que se brinda en el lenguaje cotidiano, donde se relaciona más con la formación de imágenes que con la construcción y manipulación de objetos matemáticos (Cantoral y Montiel, 2001). Además, en cualquier caso, se aleja de las consideraciones de algunas corrientes psicológicas que consideran a la visualización como una técnica perceptiva que pretende la reestructuración de componentes propiamente cognitivos (De Guzmán, 1996).

Diversos autores han dado una definición del concepto de visualización en el contexto de la enseñanza de la Matemática (Arcavi, 2003; Duval, 1999; Hitt, 1995; Zimmermann y Cunningham, 1991). Zimmermann y Cunningham (1991) definen a la visualización matemática como “la habilidad, el proceso y el producto de la creación, decodificación, uso y reflexión de cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el fin de graficar y comunicar información...” (p.3).

Duval (1999) plantea que es necesario desarrollar las tres habilidades relacionadas con la semiosis: la formación, el tratamiento y la conversión. Se refiere a la visualización como la capacidad de pasar de una representación plasmada de una forma, a otra plasmada de otra forma de manera bidireccional.

Rojas, Cruz, Escalona, Estrada, y Sánchez (2012) fundamentan a la visualización matemática como principio heurístico dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Estos investigadores se basan en presupuestos epistémicos y potencialidades axiológicas de la visualización. Además, exponen factores que viabilizan la presencia de la visualización como principio, sus acciones y sus reglas.

Empleo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática

“La tecnología se considera uno de los elementos importantes para el desarrollo de las habilidades de los estudiantes del siglo XXI, pues tienen un rol protagónico en la construcción del conocimiento” (Arancibia, Cabero y Marín, 2020, p. 91). Las TIC son cada vez más fáciles de utilizar, accesibles,

adaptables herramientas que las escuelas emplean y que actúan favorablemente en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de forma general (Castro, Guzmán y Casado, 2007). Las escuelas incorporan estas tecnologías con el propósito de hacer cambios pedagógicos en la enseñanza tradicional hacia un aprendizaje más constructivo, partiendo del desarrollo de habilidades y destrezas para que se busque la información, se construya, se simule y se compruebe hipótesis.

De este modo, se promueve la integración de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y se fundamenta que su empleo modifica el modelo de enseñanza tradicional y los estudiantes se convierten en protagonistas de la actividad aprendizaje, estimulando su desarrollo (Cristina, Lion y Godoy, 2018). Esta integración con orientaciones pedagógicas puede crear nuevos escenarios en los cuales el aprendizaje sea constructivo, permite a los alumnos y a los docentes modificar su papel dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto nos lleva a que, los estudiantes pasen de ser pasivos a activos y los docentes sean orientadores en el proceso de enseñanza.

Empleo del software GeoGebra

GeoGebra es un software de matemáticas para todos los niveles educativos. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo. Permite, dinamizar el estudio de la Matemática integrando lo experimental y lo conceptual. A continuación se presentan algunos antecedentes del empleo de la visualización en la enseñanza de la Matemática.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, uno de los contenidos que ha presentado más dificultades es el de las curvas de segundo grado o curvas cónicas (Givelly y Rojas, 2019). Este proceso puede ser dinamizado con el empleo de las TIC y el uso de la visualización matemática, cuyos antecedentes existen hace varias décadas en la literatura científica.

Presmeg (1986) realiza una clasificación de las imágenes mentales. Duval (1992) plantea representaciones gráficas y algebraicas de la ecuación de una recta y evidencia dificultades en el traspaso de un sistema a otro. De Guzmán (1996) analiza las respuestas a un cuestionario de estudiantes de primer año y observa que estos trabajan en un solo registro semiótico, el algebraico. Además, plantea obstáculos y objeciones que la visualización encuentra en las formas de comunicar y transmitir los resultados y procesos de quehacer matemático. Gatica y Ares (2012) establece la importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. Por otra parte, Givelly y Rojas (2019) realizan una investigación en la que se destaca específicamente la importancia del empleo de la visualización en el aprendizaje de las curvas de nivel para la generalización de secciones cónicas y sustentan su investigación en el uso del software GeoGebra.

Método

La investigación es de tipo cuasi-experimental y con diseño longitudinal (Sampieri, Collado y Baptista, 2014). Se considera una intervención en el aula y la aplicación de un test antes de la intervención y otro posterior a ella, ambos fueron validados por un Comité de Expertos. La muestra estuvo formada por 9 estudiantes que pertenecen al grupo de segundo año de la carrera Licenciatura en Educación Matemática de la Universidad de Holguín.

Pre-Test y Post-Test. A través de la aplicación de una prueba escrita se buscó recoger información sobre los conocimientos matemáticos de los estudiantes de segundo año de la carrera, antes y después de la intervención en el proceso docente. Esta prueba constaba de una evaluación máxima de 80 puntos, distribuidos en 4 preguntas (Tabla 1), con 20 puntos por cada respuesta correcta.

Tabla 1. Descripción de la prueba

Preguntas	Objetivos
1	Identificar y graficar curvas de segundo grado a partir de su representación algebraica.
2	Determinar en una curva de segundo grado sus principales propiedades y elementos.
3	Identificar en una representación gráfica de una curva de segundo grado sus principales propiedades y elementos.
4	Plantear y resolver problemas en los que se requiera de la aplicación de conceptos relacionados con curvas de segundo grado.

Intervención en el aula

La intervención en el aula se desarrolló en el desarrollo de la asignatura “La Informática y la Gestión del Conocimiento” mediante la resolución de tareas docentes individuales y grupales, empleando el software GeoGebra. El objetivo de la resolución de estas tareas empleando el GeoGebra fue el de introducir a los estudiantes a la visualización matemática, aprovechando la dinámica que ofrece el uso de este software que complementa la acción del profesor. Con el empleo del GeoGebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta asignatura se busca motivar el auto-aprendizaje y desarrollar el planteo y la resolución de problemas concretos al contenido de las curvas de segundo grado.

Para trabajar con los contenidos relacionados con las curvas de segundo grado, así como sus representaciones en diferentes sistemas semióticos se plantearon tareas docentes como las que muestra la Figura 1. El objetivo es establecer una conexión visual entre los elementos de las curvas de segundo grado representada algebraicamente por los parámetros a , b , h y k (elipse en este ejemplo) y su representación gráfica en un sistema de coordenadas cartesianas en R^2 .

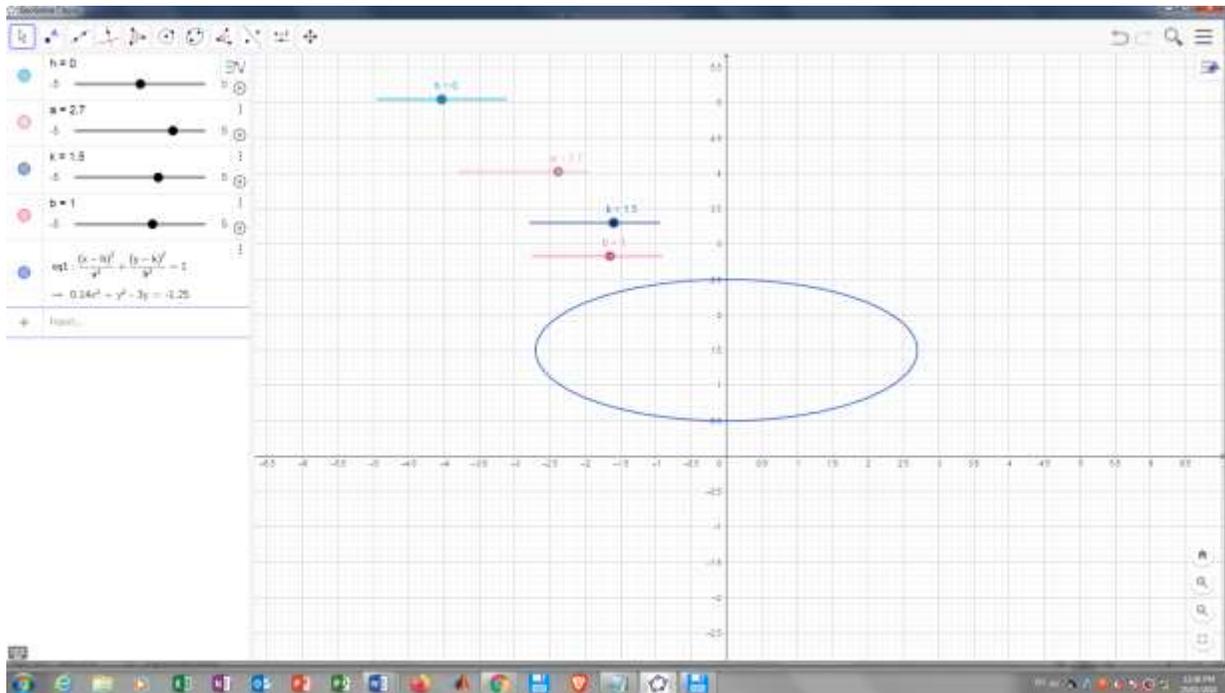


Figura 1. Representación algebraica y gráfica de una elipse

La Figura 2 muestra una representación dinámica, donde al mover el punto f se verifica la propiedad que plantea que “la suma de las distancias desde cualquier punto P de la elipse a los dos focos es constante, e igual a la longitud del diámetro mayor”, esto escrito en lenguaje algebraico es $d(P, F1) + d(P, F2) = 2a$

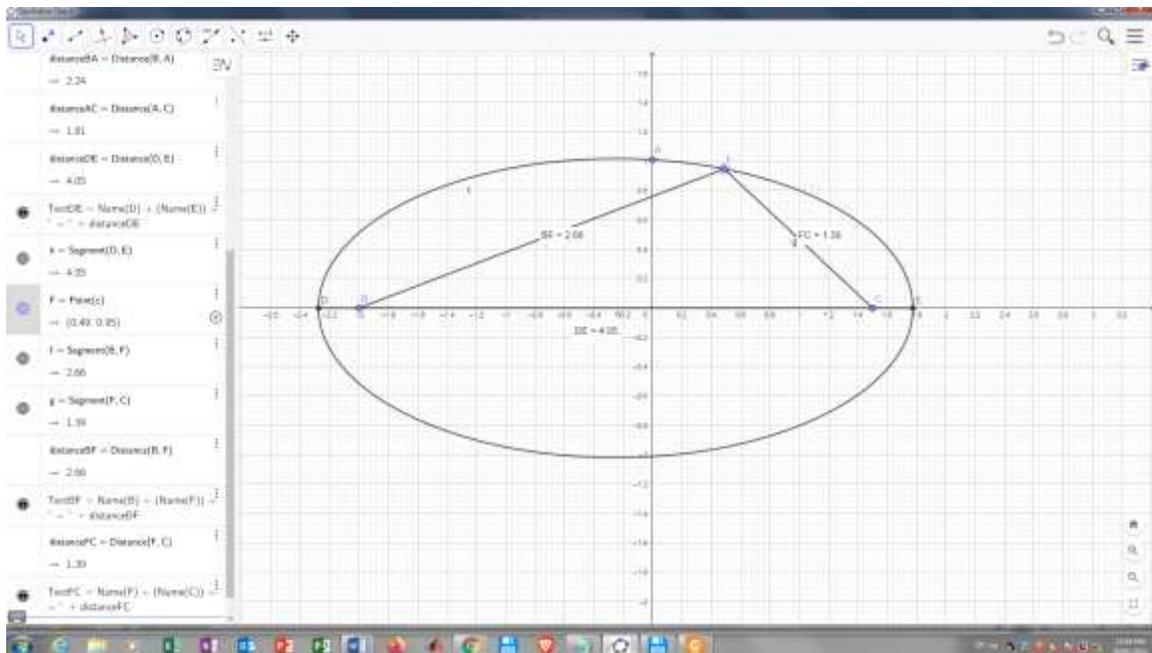


Figura 2. Representación dinámica

Resultados

En la Figura 3 se muestra los resultados del análisis exploratorio de las habilidades en el pre-test. Todos los datos fueron procesados en el entorno R (entorno y lenguaje de programación con un enfoque al análisis estadístico). En la misma se observa que, la habilidad argumentar es la que obtiene un mejor promedio de logro (42), con un valor mínimo de 20 puntos y un máximo de 60, le sigue la habilidad de analizar con un promedio de 27.78 puntos, donde el máximo de puntos alcanzado es de 50. Así mismo, las habilidades de representar y las relacionadas con el planteo y la resolución de problemas son las menos desarrolladas respectivamente.

```
> summary(Dataset)
  Argumentar   Analizar   Representar   Planteo.y.resolución.de.problemas
Min.   :20   Min.   : 0.00   Min.   : 0.00   Min.   : 0
1st Qu.:40   1st Qu.:20.00   1st Qu.:10.00   1st Qu.: 0
Median :40   Median :30.00   Median :30.00   Median :10
Mean   :42   Mean   :27.78   Mean   :22.22   Mean   :10
3rd Qu.:50   3rd Qu.:30.00   3rd Qu.:30.00   3rd Qu.:10
Max.   :60   Max.   :50.00   Max.   :40.00   Max.   :30
> |
```

Figura 3. Análisis de las habilidades matemáticas del pre-test

En la Figura 4 se plantean los resultados obtenidos en el post-test. En ella observamos que las habilidades más favorecidas son las de argumentar y la de analizar, manteniendo una tendencia similar a los resultados obtenidos del pre-test. Las habilidades de representar y las relacionadas con el planteo y la resolución de problemas son las menos desarrolladas. No obstante, se observa un avance significativo en la habilidad representar, lo que puede ser atribuido al empleo de la visualización en el proceso. En particular en las habilidades relacionadas con el planteo y resolución de problemas el 75 por ciento de los estudiantes aprueban con el mínimo de puntos.

```
> summary(Dataset)
  Argumentar   Analizar   Representar   Planteo.y.resolución.de.problemas
Min.   :40.00   Min.   :48.00   Min.   :20.00   Min.   :20.00
1st Qu.:50.00   1st Qu.:48.00   1st Qu.:40.00   1st Qu.:30.00
Median :60.00   Median :50.00   Median :50.00   Median :40.00
Mean   :59.78   Mean   :50.44   Mean   :46.67   Mean   :38.22
3rd Qu.:70.00   3rd Qu.:50.00   3rd Qu.:60.00   3rd Qu.:48.00
Max.   :80.00   Max.   :60.00   Max.   :70.00   Max.   :50.00
> |
```

Figura 4. Análisis de las habilidades matemáticas del post-test

En la Figura 5 se muestra un gráfico de densidad de los resultados obtenidos por los estudiantes que participaron durante la intervención. En el lado izquierdo el gráfico corresponde a los resultados obtenidos en el pre-test, en este se observa que la mayoría de los estudiantes obtuvieron resultados inferiores a 20 puntos. Por otro lado, la mayoría de los resultados en el post-test son superiores a los 60 puntos.

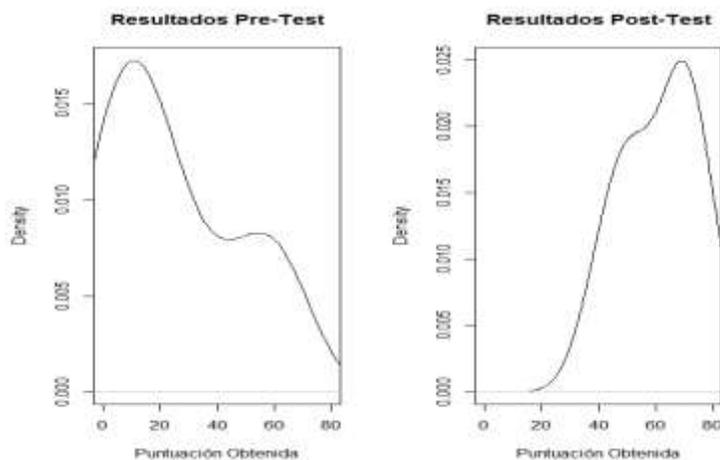


Figura 5. Gráfico de densidad de los resultados del Pre y Post-test

Para determinar si existe diferencia significativa en los resultados obtenidos antes y después de la intervención se aplica una prueba T de Wilcoxon utilizando R (Amat, 2016). Los resultados indican que para el post-test se encuentran cambios significativos en comparación con los resultados del pre-test ($v=0$, $p\text{-value}=0.125$). Lo que indica que existen avances positivos en los resultados alcanzados por los estudiantes en el post-test con relación al pre-test, atribuible a la intervención en el aula.

CONCLUSIONES

A partir de la observación de deficiencias en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las curvas de segundo grado detectadas en estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática, se plantea la necesidad de realizar una intervención de aula para trabajar metodológicamente este contenido, mediante el empleo de la visualización con apoyo del software GeoGebra. En esta intervención, se reforzaron los conceptos de las curvas de segundo grado desde lo verbal y lo algebraico para posteriormente trabajar con sus correspondientes representaciones geométricas utilizando el software GeoGebra.

La intervención en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las curvas de segundo grado que se desarrolla en los estudiantes de la carrera constó de 5 sesiones de aprendizaje, mediadas por el software GeoGebra. Como resultado, se observa una mejora en la visualización de estas curvas en los diferentes sistemas semióticos trabajados.

Con lo anterior se concluye que el uso del software GeoGebra ayudó a mejorar la comprensión de las curvas de segundo grado, partiendo de que los estudiantes logran visualizar como se relacionan la representación algebraica de estas con su representación geométrica. Se emplearon en algunos casos particulares animaciones dinámicas creadas en parte por los estudiantes. Los mismos fueron capaces de establecer regularidades y utilizaron diferentes estrategias tales como: modelar, comparar, etc. lo que fomentó el pensamiento

crítico. Puesto que los resultados son positivos, se pretende profundizar en aspectos donde la visualización se emplee como herramienta didáctica o como principio heurístico que facilite una mejor aprehensión de los conceptos matemáticos.

REFERENCIAS

- Amat, J. (2016). Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon. https://www.cienciadedatos.net/documentos/18_prueba_de_los_rangos_con_signo_de_wilcoxon
- Arancibia, M., Cabero, J. y Marín, V. (2020). Creencias sobre la enseñanza y uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en docentes de educación superior. *Formación Universitaria*, 13(2). doi: 10.4067/S0718-50062020000300089
- Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241.
- Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. Prentice Hall & Pearson Educación, México.
- Castro, S., Guzmán, B. y Casado, D. (2007). Las Tic en los procesos de enseñanza y aprendizaje. *Laurus*, 13(23), 213-234. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=761/76102311>
- Cristina, C., Lion, C. y Godoy, M. (2018). La tecnología como mediadora en la educación matemática: una experiencia con ingresantes universitarios. doi: 10.24215/18509959.22.e04
- De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra*. Pirámide, Madrid.
- Duval, R. (1992). Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. En E. Sánchez (Ed.), *Antología en Educación Matemática* (pp. 125-139). México: Sección de Matemáticas Educativa del CINVESTAV-IPN
- Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères Irem*, 17, 121-138.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2-26). Cuernavaca: The International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Duval, R. (2003). "Voir" en Mathématiques. En Filloy, E. (Ed.), *Matemática educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 41 -76). México: FCE.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 103-131.
- Duval, R. (2011). Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Brasil, São Paulo: Editorial PROEM. <https://www.readcube.com/articles/10.5212%2Fpraxeduc.v.7i2.0014>

- Escrivá, M., Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2018). Uso de software 3D para el desarrollo de habilidades de visualización en educación primaria. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 7(1), 42 - 62.
- Figueiras, L. y Deulofeu, J. (2005). Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización. *Enseñanza de las Ciencias*. 23(2), 217-226. <https://core.ac.uk/download/pdf/38990173.pdf>
- Gatica, S. N. y Ares, O. E. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. *EDMETIC*, 1(2), 88-107.
- Givelly, L. y Rojas, O. (2019). Aprendizaje de curvas y superficies de nivel para generalizar familias de secciones cónicas y de superficies cuádricas. *Roca*, 15(3). <https://core.ac.uk/download/pdf/233136656.pdf>
- Gómez, I. (2012). Visualización matemática: intuición y razonamiento. In *Contribuciones matemáticas en honor a Juan Tarrés*. UCM, Madrid, pp. 201-219. ISBN 978-84-695-4421-1
- Grisales, A. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado*, 14(2), 198-214. doi: 10.18041/1900-3803/entramado.2.4751
- Hitt F. (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto Real. *Educación Matemática*, 7(1), 63-75.
- Hitt F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Educación Matemática (Vol. 1, pp. 245-264)*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Nápoles, J. y Rojas, O. (2020). Las ecuaciones diferenciales ordinarias en un contexto realista. *Revista Paradigma*, 41, 1004-1016.
- Presmeg, N. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 297-311.
- Rojas, O. J., Cruz, M., Escalona, M., Estrada, M. R., y Sánchez, J. L. (2012). El principio heurístico de la visualización y su carácter rector para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio. En: Flores, R. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 25, pp. 1281-1289, México, <http://www.clame.org.mx/documentos/alme25.pdf>
- Ruiz, L. y Elena, F. (2013). Usando tecnología digital portátil en la resolución de problemas de cálculo. *e-Gnosis*, (11), 1-11. Guadalajara, México. <https://www.redalyc.org/pdf/730/73029399004.pdf>
- Sampieri, R., Collado, C. y Baptista P. (2014). Definición del alcance de la investigación que se realizará: exploratorio, descriptivo, correlacional o explicativo. En Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C. y Baptista-Lucio, P. *Metodología de la Investigación (6 ed., págs. 88-101)*. México: McGraw-Hill.
- Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.