

**TRATAMIENTO DIDÁCTICO INTERDISCIPLINARIO DE LA FUNCIONES MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN PREUNIVERSITARIA**

TRATAMIENTO DIDÁCTICO INTERDISCIPLINARIO DE FUNCIONES MATEMÁTICAS

AUTORES: Yurixander Castillo Rojas<sup>1</sup>Michel Enrique Gamboa Graus<sup>2</sup>DIRECCIÓN PARA CORRESPONDENCIA: [yurixandercastillo80@gmail.com](mailto:yurixandercastillo80@gmail.com)

Fecha de recepción: 23-07-2020

Fecha de aceptación: 14-09-2020

## RESUMEN

El aprendizaje de las funciones matemáticas se basa en el uso de representaciones, sus aplicaciones y la resolución de problemas de la vida desde las correspondientes relaciones interdisciplinarias. Sin embargo, en múltiples ocasiones esta magia se pierde en las escuelas por incertidumbre de los docentes para organizar adecuadamente su tratamiento didáctico. Tal posición, además de ser negativa, es desmotivadora. El objetivo de este artículo estuvo dirigido a servir de patrón referencial de la preparación que hacemos con los docentes de Matemática de la Educación Preuniversitaria en la provincia Las Tunas, en función de resolver las manifestaciones de insuficiencias que se presentan en este nivel educativo. La esencia radica en orientarlos para la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática teniendo presente las relaciones interdisciplinarias. Esto permite aportar coherencia didáctica, a partir de relaciones entre estos tres organizadores, para que exista interconexión significativa que asegure su unidad. Así se consideraría al tema de las funciones como potenciador de las relaciones de dependencia y complementariedad con los que se abordan en otras asignaturas.

## PALABRAS CLAVE

Matemática; Educación; Didáctica; funciones.

**INTERDISCIPLINARY TEACHING MANAGEMENT OF MATHEMATICAL FUNCTIONS IN PRE-UNIVERSITY EDUCATION**

---

<sup>1</sup>Licenciado en Educación, especialidad Matemática-Computación. Master en Ciencias de la Educación. Departamento de Educación Preuniversitaria de la Dirección Provincial de Educación. Las Tunas, Cuba. ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5452-633X>

<sup>2</sup>Licenciado en Educación, especialidades Matemática-Computación y Lenguas Extranjeras (Inglés). Doctor en Ciencias Pedagógicas. Centro de Estudios Pedagógicos de la Universidad de Las Tunas, Cuba. E-mail: [michelgamboagraus@gmail.com](mailto:michelgamboagraus@gmail.com). ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3704-9927>

## ABSTRACT

The learning of mathematical functions is based on the use of representations, their applications and solving life problems from the corresponding interdisciplinary relations. However, on many occasions this magic is lost in schools due to the uncertainty of teachers to adequately organize their teaching management. Such a position, besides being negative, is very de-motivating. The objective of this article was aimed at serving as a reference pattern for the training we accomplish with Mathematics teachers of Pre-University Education in the province of Las Tunas, in order to solve the manifestations of insufficiencies that occur at this educational level. The essence is to guide them in the teaching-learning process of Mathematics, keeping in mind the interdisciplinary relationships. This makes it possible to provide teaching coherence, based on relationships between these three organizers, so that there is a significant interconnection. Thus, this topic would be considered as a promoter of the relationships with those addressed in other subjects.

## KEYWORDS

Mathematics; Education; Didactics; functions.

## INTRODUCCIÓN

La acelerada renovación y actualización de los conocimientos científicos como consecuencia de una revolución científico-técnica sin precedentes en su desarrollo, hace que cada vez más ocupe un plano de mayor relevancia la reflexión acerca de la importancia de las ciencias y las tecnologías en la solución de los problemas sociales. Se hace cada vez más necesario perfeccionar el papel que deben jugar las asignaturas y en especial la Matemática en la adquisición de esos conocimientos, para dar solución a las complejidades que enfrentamos. De ahí que tomar en cuenta los nexos y las relaciones entre ellos, atenderlos con enfoques más integrales para abordarlos, se hace inevitable.

En el ámbito escolar, las contradicciones son cada vez más evidentes en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Se presentan conocimientos fragmentados y se exige un estudiante cada vez más integral, crítico, participativo e incluido en el contexto social. Lograr que sean capaces de entender el mundo en que le tocó vivir es hoy un reto de la educación. Esto no será posible mientras no se le prepare para ello, cobrando así más fuerza la reunificación del saber cómo una de las vías para lograr tal propósito.

Se debe propiciar mediante métodos y estilos de comunicación apropiados que el ambiente que se propicie para la enseñanza-aprendizaje de la Matemática sea sugerente y agradable. Desterrar la idea de que solo puede ser aprendida por unos pocos, es un reto importante hoy para nuestros docentes. Demostrar que no solo sirve para efectuar cálculos, sino comprenderla como una necesidad, como algo vinculado a la vida. A partir de utilizarla como una herramienta conceptual de mucho valor para modelar situaciones diversas. De

ahí la importancia de su interrelación con las demás asignaturas y su contribución al razonamiento.

El aprendizaje de la Matemática se convierte entonces en una prioridad del Sistema Nacional de Educación en Cuba (SNE), que permite adquirir nuevos conocimientos sobre la base del concepto problema en sentido amplio y potenciar el desarrollo de los estudiantes hacia niveles superiores de desempeño cognitivo. Este aprendizaje se desarrolla mediante la realización de tareas integradoras cada vez más complejas, con el tránsito paulatino de la dependencia a la independencia cognoscitiva y la creatividad, la reflexión, el análisis de los significados y las formas de representación de los contenidos.

El desarrollo de la Matemática, cuyos resultados impactan el arte, las ciencias y las tecnologías, ha contribuido a la transformación del mundo. Es evidente entonces, la necesidad y la utilidad de reunificar el saber, para perfeccionar el aprendizaje de la Matemática y ver las ventajas que ofrece enseñarla mediante problemáticas de la vida cotidiana. De este análisis se infiere la necesidad de integración con las demás asignaturas que se imparten en el currículo, mostrando al estudiante su significación social a partir de vivencias y valoraciones de hechos, fenómenos o procesos de la naturaleza a escala local, nacional, regional o mundial. Aprovechar la flexibilidad del currículo para atender lo que ocurre fuera del aula, tanto a nivel comunitario como a mayor escala, permite enriquecer el acervo cultural de los estudiantes.

Es necesario comprender que la Matemática tiene notable influencia en la vida cotidiana, en todas las esferas del quehacer social; nada ni nadie escapa de su influencia, lo que reafirma su importancia social para el desarrollo y comprensión de otras asignaturas. En este sentido, el concepto de función es uno de las más importantes de las matemáticas, ya que es posible aplicarlo a numerosas situaciones de la vida cotidiana, con objeto de determinar la dependencia que existe entre magnitudes (físicas, matemáticas, económicas, etc.) y calcular el valor de una de ellas en función de la otra u otras de las que depende. De ahí la importancia de desarrollar una planificación coherente del proceso de enseñanza-aprendizaje.

La concepción de la disciplina Matemática en el III perfeccionamiento de la educación cubana asume los componentes del contenido de la Educación. Al mismo tiempo, se fundamenta en las líneas directrices de la enseñanza de la Matemática, en tanto que se sustenta en los lineamientos para el tratamiento metodológico de la disciplina, en función de formular y resolver problemas. De tal forma, los objetivos de la disciplina se insertan en los programas de estudio de las asignaturas mediante la derivación gradual de objetivos, su concreción en los contenidos por unidades, orientaciones metodológicas generales por unidades en que se ofrecen sugerencias en cuanto a los métodos y procedimientos, medios de enseñanza, formas de organización entre las que se introduce la clase de laboratorio, y exigencias para la evaluación.

El estudio que debe realizar el docente de cada componente (Gamboa, 2020) genera categorías que lo orientan para entender relaciones didácticas a lo interno de los componentes, entre componentes, principios y leyes que debe atender para este diseño del desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Categorías como derivación, determinación y formulación del objetivo, conocimientos, habilidades y valores, como parte del contenido; procedimientos y tareas, como parte de los métodos de enseñanza y aprendizaje; fuentes y recursos didácticos, desde medios de enseñanza y aprendizaje; clase, consulta, tutoría, la clase de laboratorio, como formas de organización; así como de la evaluación sus funciones, tipos y diferentes formas.

Existen múltiples relaciones didácticas en las que los docentes se deben orientar teóricamente (Castillo y Gamboa, 2020b). Algunos ejemplos de estas son: entre derivación, determinación y formulación de objetivos; entre conocimientos y habilidades; entre conocimientos y valores; entre conocimientos, habilidades y valores; entre objetivo y contenido; entre objetivo, contenido y método; entre contenido y medios; entre objetivo y método; entre métodos de enseñanza y métodos de aprendizaje; entre métodos de enseñanza y medios de enseñanza; entre métodos de aprendizaje y medios de aprendizaje; entre métodos de enseñanza aprendizaje, medios de enseñanza-aprendizaje y formas de organización; entre contenido y evaluación; entre métodos y formas de organización. El propósito fundamental de este artículo está dirigido a servir de patrón referencial de la preparación que hacemos con los docentes de Matemática de la Educación Preuniversitaria en la provincia Las Tunas, sobre la base del adecuado tratamiento didáctico que se requiere.

## DESARROLLO

### *Sugerencias didácticas del enfoque metodológico general de la asignatura Matemática*

Este diseño, desde el punto de vista práctico, se debe hacer a una unidad o subunidad del programa. Ello permite, de forma operativa, abarcar el próximo contenido que está por ser tratado. Hay diferentes formas de realizar este trabajo. Sin embargo, cualquier forma ha de tomar en cuenta de alguna manera las sugerencias didácticas del enfoque metodológico general de la asignatura Matemática (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014).

### *Objetivos*

El objetivo es un elemento programático que identifica la finalidad hacia la cual deben dirigirse los recursos y esfuerzos para dar cumplimiento a la unidad didáctica con carácter interdisciplinario propuesta. Este tiene una función orientadora y determinante. Su componente instructivo es importante al relacionar los conocimientos, con hábitos y habilidades. Su componente educativo está encaminado a desarrollar en los estudiantes convicciones, sentimientos, actitudes, particularidades del carácter, sistema de motivos e intereses entre otras que resultan vitales para formación integral del individuo.

Su componente desarrollador está en el auto-conocimiento de los recursos internos para determinar debilidades y potencialidades en función de transformar el medio y a sí mismo.

Con respecto a las funciones, en la Educación Preuniversitaria de Cuba, se persigue: Identificar si una relación entre dos conjuntos o un conjunto de pares ordenados constituye una función. Reconocer diferentes tipos de funciones estudiadas, sus formas de representación, propiedades y gráficos. Identificar las funciones lineales, modulares y cuadráticas; determinar sus propiedades y realizar e interpretar sus representaciones gráficas. Realizar traslaciones del gráfico de una función cuadrática o modular en la dirección de los ejes de coordenadas. Trasferir las propiedades de una función de una forma de representación a otra. Reconocer diferentes tipos de funciones potenciales, sus formas de representación, propiedades y gráficos. Realizar traslaciones del gráfico de una función cuadrática o modular en la dirección de los ejes de coordenadas. Trasferir las propiedades de una función de una forma de representación a otra. Determinar la imagen de una función potencial en todo su dominio o en un dominio de definición restringido. Conocer el significado de la asíntota del gráfico de una función y determinarla en las funciones potenciales. Reconocer diferentes tipos de funciones exponenciales y logarítmicas, sus formas de representación, propiedades y gráficos. Trasferir las propiedades de una función de una forma de representación a otra. Realizar traslaciones del gráfico de estas funciones en la dirección de los ejes de coordenadas. Determinar la imagen de una función potencial en todo su dominio o en un dominio de definición restringido. Conocer el significado de la monotonía en las funciones exponenciales y logarítmicas y su aplicación a la resolución de inecuaciones sencillas. Conocer las funciones trigonométricas, sus propiedades y gráficos. Aplicar estos conocimientos en la resolución de ejercicios, esencialmente relacionados con en el cálculo de valores funcionales; la determinación del dominio de definición y la imagen de una función trigonométrica; la monotonía en un intervalo dado y la resolución de ecuaciones.

Sugerencias didáctico-metodológicas con respecto a los objetivos: Integrar lo instructivo, educativo y desarrollador. Atender junto a propósitos cognitivos, las intenciones de los dominios afectivos y psicomotor. Atender las indicaciones de documentos oficiales y las orientaciones de medios auxiliares. Expresar taxonomías de verbos para formular objetivos que revelan en qué acciones de los estudiantes se comprobará el efecto del aprendizaje. Prever la descomposición en metas parciales y vías para su cumplimiento. Concebir la unidad del contenido y su aplicación de acuerdo con la realidad contextual. Estimular el protagonismo de los estudiantes. Proyectar el trabajo activo, creador y metacognitivo del estudiante. Incentivar acciones de investigación y comunicación de resultados. Fomentar la valoración de la moral, la virtud, el deber, la felicidad y el buen vivir.

La redacción del objetivo formativo debe dar una idea general de qué se quiere alcanzar en términos de habilidades, conocimientos, valores, así como aquellos elementos más importantes en cuanto a métodos, procedimientos o vías para lograr dicho propósito. Para ello se deben tener en cuenta los requisitos siguientes: Iniciar su redacción con un verbo en infinitivo, que exprese la habilidad intelectual más importante que se aspira obtener de los alumnos en la clase. Expresar el contenido específico de ella, de una manera clara y concreta (incluye contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales). Reflejar el método, las técnicas, los procedimientos y los medios de enseñanza de forma explícita o implícita. Estar redactado en función del aprendizaje, es decir, de lo que el alumno realizará en su búsqueda activa del conocimiento y a qué nivel de asimilación va a ser cumplido y comprobado en la clase. Incluir la intencionalidad educativa, lo que casi siempre comprende los contenidos actitudinales que los alumnos desarrollarán en la clase.

De tal forma, se persigue aplicar los conceptos de funciones en la resolución de ejercicios y problemas de la realidad educativa que atiendan a las diferentes facetas de la formación integral de los estudiantes, como la formación vocacional y la orientación profesional, la educación patriótica, moral, física, ambiental, para la salud, la equidad de géneros y la sexualidad responsable, usando las posibilidades de las tecnologías de la información y las comunicaciones.

### *Contenidos*

El contenido matemático es aquella parte de la cultura y experiencia social relacionada con la matemática que debe ser adquirida por los estudiantes en correspondencia con el valor científico de este. Constituye la piedra angular para comprender otros contenidos más complejos de la propia asignatura y de otras, en su carácter único y diverso, por lo que es importante lograr un trabajo interdisciplinario en la formación y desarrollo de diferentes habilidades intelectuales a partir de una adecuada sistematización; para comprender los conceptos primarios o fundamentales de la enseñanza-aprendizaje de esta asignatura y posibilitar su solidez, a partir de los cuales se diseña todo el enrejado conceptual por estudiar.

Sugerencias didáctico-metodológicas con respecto a los contenidos: Manifestar los errores potenciales del sistema de conocimientos, así como las conexiones entre ellos, con la organización de dificultades y potencialidades para la transformación. Implementar los sistemas de representación adecuados al sistema de habilidades, sus relaciones, limitaciones y potencialidades según la realidad de los involucrados. Contemplar la realización de procesos relevantes en la actividad matemática, como la modelización, argumentación, establecimiento de conexiones y resolución de problemas. Relacionar los significados con otros contenidos interdisciplinarios. Atender el entrelazamiento de líneas directrices para la estructuración de la enseñanza. Potenciar los campos de aplicaciones conforme al sistema de relaciones con el mundo para la

solución de problemas de la vida en situaciones dadas en la realidad del contexto local. Utilizar datos reales de la vida cotidiana sustentados en fuentes confiables de información. Integrar la interacción entre las Matemáticas y las situaciones que las impulsan, y su impacto. Atender la formación de valores desde una educación ética y estética. Incorporar nuevos saberes acorde al sistema de experiencias de la actividad creadora, de acuerdo con los recursos tecnológicos y la cultura de los involucrados.

En Santos y Gamboa (2017) se puede profundizar en el tratamiento propedéutico del concepto función. Si bien se hace en sexto grado de la enseñanza primaria el tratamiento en la Educación Preuniversitaria es análogo. Para lograr una mayor comprensión del tema es necesario que los estudiantes posean los siguientes conocimientos: Realizar operaciones aritméticas básicas con números reales y con variables. Representar puntos en un sistema de coordenadas rectangulares a partir de sus coordenadas. Evaluar la ecuación de una función asignándole valores numéricos a la variable independiente. Comprender, y aplicar al cálculo, el concepto de módulo o valor absoluto de un número real. Conocer los conceptos de dominio de definición e imagen de una función y el significado de las propiedades globales de una función: ceros, monotonía, paridad, valores extremos e inyectividad.

Se realiza una sistematización del concepto de función como una relación entre dos conjuntos y como un conjunto de pares ordenados, ambos casos, sujetos a características especiales. Se hace la presentación de un diagrama, como organizador previo del aprendizaje, para propiciar el debate sobre los tipos de funciones que se deben sistematizar, las formas de representación, las propiedades y los gráficos correspondientes. Se proponen ejercicios variados para el trabajo independiente y se emiten orientaciones metodológicas para el tratamiento de los conceptos, relaciones y procedimientos básicos relacionados con las funciones numéricas potenciales de exponentes enteros y fraccionarios. Se realiza una sistematización de las funciones potenciales de exponente entero, agrupándolas según sus ecuaciones y la forma de sus gráficos. Igualmente, se hace un repaso de las funciones raíz cuadrada y raíz cúbicas como funciones inversas de las funciones cuadráticas (para argumentos no negativos) y cúbicas respectivamente. Se realiza una sistematización de las funciones exponenciales y logaritmos como funciones inversas, para esto se realiza un análisis en paralelo de ambas funciones de manera general y particular. Se realiza una sistematización de la función seno a partir de sus propiedades y gráfico. Se sugiere que se realice un análisis similar con las funciones coseno, tangente y cotangente.

En la Educación Preuniversitaria cubana se asume la siguiente definición del concepto función: “Una función es una correspondencia que a cada elemento de un conjunto A asocia un único elemento de un conjunto B” (Acosta, et al., 2014, p. 281). Esta es la definición de función vista como correspondencia. Una función, a partir de pares ordenados, también se define como: “Una función  $f: X \rightarrow Y$  es un conjunto de pares ordenados  $(x; y)$  tal que cada  $x \in X$  aparece como

primera coordenada de un solo par ordenado” (Campistrous, Miyar, Naredo, Rivero, Montes de Oca, y Durán, 1989, p. 124). Una sistematización completa sobre funciones se encuentra en Castillo y Gamboa (2020a). En ella se puede encontrar el tratamiento de dominio, imagen, esbozo gráfico, simetría, monotonía, puntos de intersección, inyectividad, sobreyectividad, signos, periodicidad, pendiente de una recta, operaciones con funciones, función compuesta e inversa.

### *Métodos*

El método como componente dinámico del proceso de enseñanza-aprendizaje, es expresión del sistema de acciones y operaciones que realizan el docente y los estudiantes, de manera activa, para la adquisición de conocimientos y el desarrollo de hábitos, habilidades y convicciones en función de un determinado objetivo propuesto. El carácter regulador de la secuencia de actividades se deriva de esta función, al condicionar los pasos didácticos que se dan para alcanzar tales propósitos. De ahí la relación fundamental que se establece entre objetivo, contenido, métodos y forma de organización. En Joaquim, Gamboa y Fonseca (2017) se puede profundizar en procedimientos para el tratamiento de las funciones lineales a partir de las acciones mentales de la teoría de Galperin.

La determinación de los métodos debe hacerse desde varias perspectivas (Ballester et al., 2019): La vía lógica del conocimiento (método inductivo, deductivo, genético, analítico y sintético). La comunicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje y el grado de independencia del trabajo de los alumnos (método expositivo, método de elaboración conjunta y de dirección del trabajo independiente). Estos métodos se corresponden con las formas metodológicas referidas en el aspecto externo del método. Las etapas de desarrollo de la experiencia creadora y la actividad cognoscitiva (método receptivo de información, método reproductivo, método de exposición problémica, método heurístico y método investigativo. Las formas de organización de la enseñanza (método de enseñanza frontal, método de trabajo diferenciado, método de excursiones). La fuente de apropiación de los conocimientos (métodos de trabajo con el libro de texto, método de empleo de los medios audiovisuales, método de empleo de juegos, de técnicas participativas, etc.). Las funciones didácticas (método para el aseguramiento del nivel de partida, la motivación y la orientación hacia el objetivo, método para la elaboración de la materia nueva, para la fijación y para el control y la evaluación). Según el carácter de la actividad cognitiva de los alumnos: reproductivos o productivos.

Sugerencias didáctico-metodológicas con respecto a los métodos: Propiciar la actividad reflexiva y la regulación metacognitiva, el análisis de los significados y formas de representación de los contenidos. Promover comunicación, interacción y crítica. Integrar el desarrollo cognitivo (curiosidad, pensamiento crítico, creatividad, resolución de problemas, toma de decisiones) con el desarrollo emocional (confianza, autonomía, autoestima) y el desarrollo social (competencia social, comprensión empática). Integrar las funciones didácticas



del proceso de enseñanza-aprendizaje para la asimilación. Concebir las situaciones típicas de la enseñanza de las Matemáticas. Facilitar la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión. Atender la distribución del tiempo en función de los contenidos nucleares del tema, su grado de dificultad, y los resultados del diagnóstico. Estimular que los estudiantes se enseñen unos a otros. Potenciar tránsito progresivo de dependencia a independencia, autorregulación y creatividad. Sistematizar continuamente conocimientos, habilidades y modos de la actividad mental, tratando además de que se integre el saber de los estudiantes. Incentivar la actitud productiva y creadora en el proceso de aprendizaje.

#### *Medios de enseñanza-aprendizaje*

Los medios de enseñanza-aprendizaje son el soporte material de los métodos en estricta dependencia de los objetivos propuestos y reveladores del aspecto interno del método. Esto permite utilizar con un enfoque sistémico los recursos disponibles para la salida a los componentes educativos, la interdisciplinariedad, actividades de motivación y orientación que se van a realizar en los diferentes momentos del proceso, para favorecer la independencia cognoscitiva de los estudiantes.

Sugerencias didáctico-metodológicas con respecto a los medios: Utilizar los recursos didácticos en correspondencia con el desarrollo tecnológico disponible. Aprovechar el potencial de la conectividad en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Potenciar el reconocimiento de modelos, la búsqueda de patrones, la generalización, la abstracción, la comprobación, la refutación, la argumentación, planteamiento de conjeturas. Estimular estrategias cognitivas y metacognitivas, en su orientación para la investigación. Estimular uso pedagógico de tecnologías de Informática y Comunicación para colaboración, al adquirir conocimientos y racionalizar trabajo de cálculo, y también con fines heurísticos. Emplear la bibliografía como recurso para que los estudiantes aprendan por ellos mismos. Usar recursos audiovisuales y sistemas de aplicación portadores de contenido planificado. Emplear materiales comunes de vida cotidiana donde pueden apreciar Matemáticas en acción. Desarrollar habilidades para la búsqueda de información, la interpretación de diversas fuentes, la selección crítica, el trabajo cooperado y la argumentación. Implicar a estudiantes en la selección, confección o utilización de los medios que utilizan.

El uso de diferentes tipos de software para el trabajo con funciones propicia escenarios educativos, para que los nuevos saberes sean apropiados por parte del estudiante, en lo que se refiere a las funciones matemáticas. En este apartado se presentan algunos de los más utilizados, junto a otros que han sido presentados en la literatura como estrategia de apropiación (Fernández, Riveros y Montiel, 2017).

GeoGebra (<https://www.geogebra.org/download?lang=es>). Descripción: Para el logro del propósito del trabajo con funciones se recomienda el GeoGebra como programa computarizado disponible. El mismo brinda un potencial

extraordinario y posibilita transformar el proceso de enseñanza - aprendizaje de las funciones en favor de lograr resultados más efectivos. El programa se caracteriza por su versatilidad y fácil uso, además por interactuar de una forma dinámica con los objetos matemáticos, lo cual propicia a los alumnos experiencias de las que antes no disponían. Además, este es un software matemático interactivo libre que permite el trazado dinámico, así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y otras bondades útiles para el trabajo educativo. Esto genera la exploración de los objetos matemáticos, por parte de los alumnos, permite que estos formulen conjeturas para analizar la variación o no de propiedades y relaciones al modificarlas, obtener ideas para argumentar su validez, entre otras cuestiones. Se generan así actividades, ejercicios y problemas más desarrolladores, diferentes a los usuales con lápiz y papel.

En Fernández, Gamboa, Rodríguez y Alfonso (2016), así como en Fernández, Gamboa y Rodríguez (2016, 2017), se presenta Geogebra como un medio eficaz en la enseñanza de las funciones reales de una variable real. Con GeoGebra se propicia igualmente el empleo de procedimientos heurísticos (Cruz y Gamboa, 2020) como considerar casos particulares, considerar casos límite, medir y comparar, así como la búsqueda de relaciones y dependencias. Al darle movilidad a las figuras se logra de una manera natural el análisis de lo que ocurre al hacer variaciones, es decir, determinar qué varía y qué se mantiene, así como la dependencia existente entre los elementos analizados. Se forma así, en los estudiantes, una idea de cuál puede ser la solución del problema.

EXCEL: Se sugiere el uso del EXCEL y de asistentes matemáticos como el GeoGebra. Esto es una necesidad por las implicaciones que tiene la revolución informática en el futuro del tratamiento didáctico de las funciones. La potencia de cálculo de un ordenador puede ayudar, por ejemplo, a realizar cientos o miles de correspondencias en un tiempo muy reducido. Asimismo, puede analizar decenas de modelos funcionales en un tiempo muy corto y después mostrar la función más apropiada de ellos. A pesar de que GeoGebra suele ser considerado de los más eficaces, en muchas escuelas se pueden utilizar programas como Excel. Su uso parece más sencillo a quienes los usan, la mayoría de las personas están familiarizadas con él y la mayor parte de las escuelas ya tienen instalado Excel en sus ordenadores. Además, teniendo en cuenta la necesidad de implementar software libre, de esta forma se aseguran las bases para continuar trabajando de manera análoga con paquetes similares a Excel, como GNUmeric u OpenOffice.org Calc sobre sistema operativo GNU/Linux. Sin embargo, es conveniente aclarar a los docentes la necesidad de utilizar asistentes matemáticos con una capacidad heurística mucho mayor a nivel de investigación de patrones funcionales.

Graphmatica (<http://www.sectormatematica.cl/software.htm>). Descripción: Es un programa para representaciones gráficas, calcular áreas, derivadas, resolver ecuaciones, entre otros. Este software determina el tipo de gráfico que usted está ingresando basándose en las variables usadas, reconoce dominios de

ecuaciones si usted los incluye, altera dinámicamente la razón de muestreo mientras grafica, para asegurar que gráficas empujadas como la de  $y = \tan x$  sean dibujadas correctamente, ajusta la razón  $x/y$  cuando usted modifica el rango o cambia el tamaño de la ventana de gráficos para que se mantenga el aspecto apropiado del gráfico, redibuja la(s) última(s) ecuación (es) ingresada(s) cuando se cambia el tamaño o la forma de la grilla por cualquier medio, y restablece la grilla y las opciones especiales de configuración cuando se carga una lista de ecuaciones que las posee. El software educativo Graphmatica, permite graficar en la pantalla todo tipo de funciones y cálculos matemáticos. También disponen de un analizador de funciones para lograr una correcta escritura de una función, respetando las reglas del álgebra. Puede hallar gráficamente derivadas, rectas tangentes, integrales definidas, obtener tablas de valores, entre otros.

Winplot(<http://escritoriomiciliaria.educ.ar/programasysoftwareeducativo/matematica/graficadores-de-funciones-matematicas/>). Descripción: Con Winplot se pueden generar gráficos de funciones lineales, cuadráticas, hiperbólicas, exponenciales, geométricas y trigonométricas, aplicadas a distintas áreas de conocimiento: demografía, biología, física, química, entre otros. Con este programa los alumnos podrán ejercitar con ecuaciones explícitas, paramétricas, implícitas y cilíndricas, generar curvas simples tanto en dos como en tres ejes (2D y 3D). También permite modificar los valores de X, Y y Z en puntos de corte, número de divisiones. Así como, visualizar animaciones con las gráficas. Se trata de un programa bastante completo para el estudio de funciones. La utilización de parámetros permite el estudio de las características globales de familias de funciones de forma ágil. Se pueden anclar textos explicativos asociados a las curvas y cuenta con precisas herramientas de zoom y de desplazamiento de la ventana por las distintas regiones de la gráfica.

Funciones para Windows (<http://www.lagares.org>). Descripción: Se trata de un pequeño programa en cuanto a su tamaño, pero una herramienta importante en cuanto a sus prestaciones. Como su nombre indica sirve para realizar estudio de funciones. Presenta funciones definidas de forma explícita o mediante tabla de valores. Tiene una herramienta de estadística bidimensional para el estudio de regresión lineal, cuadrática, potencial, exponencial, entre otras. Como afirma su autor, el profesor Jordi Lagares, autor de otros interesantes programas para funciones, permite estudiar, dada una función de una variable, casi todo lo que hay en las programaciones oficiales de la asignatura de Matemáticas, durante casi toda la enseñanza primaria, secundaria y primer ciclo universitario.

Funciones cuadráticas (<http://www.nicaraguaeduca.edu.ni/educablog/Entrada/151software-educativo-qlfunciones-cuadraticasq>). Descripción: Este software abarca Introducción, tipos de parábolas, vértice de las parábolas, puntos cortos con los ejes, representación gráfica, resolución de problemas con parábolas, lo más importante auto evaluación. Dicho software explica paso a paso el concepto de funciones cuadráticas mediante un esquema conceptual y

recuerda el concepto de funciones, representa gráficamente las funciones cuadráticas e identificarlas con las parábolas, también identifica los distintos tipos de parábolas a partir del valor de los coeficientes de la función cuadrática mostrando varios ejemplos, el cual hacen de este, un software ideal para la enseñanza de funciones de matemática de 9° año de Educación Media General.

**K3DSurf** (<http://educarymotivar.blogspot.com/2013/03/k3dsurf-graficafunciones-matematicas.html>). Descripción: K3DSurf es un programa para visualizar y manipular modelos matemáticos en las dimensiones tres, cuatro, cinco y seis. Puede ser utilizado por todos y cada uno que le interese los gráficos 3D de las funciones matemáticas. No requiere habilidades especiales, debido a que los desarrolladores lo diseñaron con la intención de hacerlo simple, pero sin afectar su eficacia. Este software ha sido desarrollado para ser usado por los usuarios principiantes en Ciencias Matemáticas incorporando más de 50 ejemplos de prueba, para que practiquen agregando y quitando algunas funciones de ecuaciones y visualicen nuevos resultados, es la mejor manera de entender el comportamiento de las funciones matemáticas en 3D.

**Derive** (<http://www.derive-europe.com/>). Descripción: Derive es una herramienta matemática de propósito general que procesa todo tipo de números (naturales, enteros, racionales, reales y complejos), variables, expresiones algebraicas, ecuaciones, vectores, matrices, funciones, entre otros. En cuanto a su representación gráfica, esta es a partir de la fórmula algebraica, de tablas de datos, estudio global, familias de curvas, composición de funciones y funciones inversas, estudio local, límites laterales en un punto, continuidad, límites infinitos, asíntotas, derivadas e integrales. Y entre sus características se tienen: Gráficos 2D (en forma explícita, implícitas y paramétricos; coordenadas rectangulares y polares; funciones de variable compleja; especificación de colores; permite poner etiquetas de ejes y anotaciones sobre los gráficos...). Gráficos 3D (mallado para funciones de dos variables; selección del punto de vista; cambio de escala; rotación de gráficos en tiempo real).

**Calc 3D Prof** (<http://www.calc3d.com>). Descripción: Se trata de un programa gratuito que contiene una colección de herramientas matemáticas que incluyen: Editor de texto con funciones matemáticas, calculadora activa en el texto, integral definida. Representación de funciones en el plano y en el espacio. Gráficos y cálculos estadísticos, entre otros. Es un programa interesante sobre todo para la Educación Preuniversitaria ya que de hecho es una calculadora gráfica que incluye todas las herramientas procedimentales contempladas en el currículo. Para los docentes puede ser un instrumento de ayuda para preparar materiales, ejercicios, comprobar resultados, entre otros.

**FunGraph** (<http://centros5.pntic.mec.es/ies.salvador.dali1>). Descripción: Realiza prácticamente las mismas funciones que el programa winplot. El Fungraph representa una o dos funciones, traza la gráfica de la derivada primera y segunda y la recta tangente a la curva en un punto. De igual manera, calcula los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad,

encuentra los puntos singulares: cortes con los ejes, corte entre dos funciones, máximos, mínimos y puntos de inflexión. Bajo este mismo orden de ideas, es importante destacar que esta se enmarca dentro del enfoque epistemológico, introspectivo vivencial (cualitativo), es de tipo documental, con un diseño bibliográfico; el análisis con el propósito de establecer significado a la información obtenida y elaborar un diagnóstico sobre la situación real del tema que se aborda, de contenido; han sido establecidos una serie de actividades entre las cuales tenemos: Revisión de documentos (unidades de análisis) relacionados con las variables objetos de estudio (categorías), categorización y tabulación de la información que permitió hacer inferencias válidas y confiables acerca de los datos.

Maple. Es un sistema de cálculo simbólico (mantiene y manipula símbolos y expresiones), posee un amplio conjunto de rutinas gráficas para visualizar información matemática compleja, algoritmos numéricos que dan soluciones precisas y un lenguaje de programación completo y comprensible que permite al usuario crear sus propias funciones y aplicaciones. Maple contribuye con la mejora de las habilidades cognitivas del usuario, de manera tal que ejecuta procedimientos que con la educación tradicional del aula sería costoso en tiempo, precisión, visualización y en comprensión. Además, el registro en formato electrónico de las actividades hechas por el alumno hace posible el análisis de los aciertos, errores y tiempos de respuesta, los cuales son datos importantes para que el docente logre una adecuada evaluación formativa.

#### *Formas de organización*

Es el componente integrador del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática donde se concretan y materializan las partes, características y relaciones para potenciar un aprendizaje desarrollador, a partir de verla como un todo sistémico. Constituye el espacio organizativo exterior (físico y temporal) donde se establecen las relaciones entre el docente y los estudiantes. El tratamiento al nuevo contenido, la consolidación, la ejercitación, la aplicación y el control entre otros, son indispensables en la organización de lo que se enseña. Para el tratamiento didáctico de las funciones se recomienda el empleo de la clase de laboratorio como nueva forma declarada en el III Perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación en Cuba. Esto potencia la actividad mental y práctica de los estudiantes, de manera que les permitan, previo entrenamiento, utilizar estrategias, métodos y procedimientos de solución. Esto les permite poder aplicar sus conocimientos frente a situaciones nuevas de distinta índole, a manera de problemas. El trabajo heurístico reviste importancia para la resolución independiente por los estudiantes de ejercicios de diferentes tipos y que no tienen carácter algorítmico. Esto señala la necesidad de que los alumnos aprendan a aplicar los elementos heurísticos a la resolución de ejercicios, problemas y actividades.

Sugerencias didáctico-metodológicas con respecto a las formas de organización: Presentar configuración sistémica con carácter contextualizado, diversificado e integrador. Propiciar una participación activa de los estudiantes, con

orientación activo transformadora. Propiciar un balance de actividad colectiva e individual. Emplear varias formas que activan la colaboración en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Estimular la auto-preparación de los estudiantes en trabajo independiente sin la presencia del profesor, individual o colectiva. Ampliar los espacios de formación más allá de las aulas en colaboración escuela-familia-comunidad para experimentar Matemáticas en diferentes contextos en que estas se exponen. Emplear la tutoría o acompañamiento para estimular la reflexión y la creación. Crear espacios de consulta y acción productiva conjunta. Implementar clubes de ciencias, sociedades científicas, círculos de interés, proyectos u otras formas que estimulan la investigación. Involucrar agentes que emplean las Matemáticas para la producción y los servicios en talleres, empresas, fábricas, industrias u otras agencias.

### *Evaluación*

La evaluación es el componente del proceso de enseñanza-aprendizaje que revela el estado de los procesos de desarrollo cognitivo, afectivo, volitivo y comunicativo de los estudiantes en relación con los objetivos a lograr. Se desarrolla como un proceso planificado, sistemático, continuo y de retroalimentación constante. Permite comprobar y confirmar el nivel alcanzado durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, emitir un criterio evaluativo y certificar saberes para la toma de decisiones inteligentes al respecto.

Sugerencias didáctico-metodológicas con respecto a la evaluación: Plantear secuencias de ejercicios, problemas y actividades que atienden al desarrollo integral de los estudiantes en situaciones de recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear. Potenciar el desarrollo hacia niveles superiores de desempeño con tareas más complejas adaptadas a las diferencias individuales. Incluye actividades de ampliación y de refuerzo. Integrar lo cuantitativo y cualitativo, el proceso y resultado. Proponer la autoevaluación para promover la actividad metacognitiva de los estudiantes en función de ponerlos en condiciones de desarrollarse por sí mismos. Promover la discusión de alternativas y procedimientos para la solución de tareas docentes. Añadir apoyo emocional en favor de actitudes, motivaciones, sentimientos y autoconfianza. Estimular la reflexión sobre el impacto de las Matemáticas en el desarrollo local y global. Incorporar momentos de evaluación oral en favor de la argumentación en situaciones de igualdad desde una dialéctica de comunicación y actividad. Presentar una gama de tareas que refleja prioridades y desafíos al realizar investigaciones. Comprometer a los estudiantes en la producción de soluciones, si es posible en colaboración.

### *Organizadores del currículo para tratamiento didáctico de funciones*

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina Didáctica de la Matemática, se requiere emplear organizadores del currículo que permitan lograr mayor coherencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática (Gamboa, 2007; Gamboa y Borrero, 2017). Esto es a partir de una visión global de lo que se enseña y aprende de manera organizada. Se espera

que así se potencie la preparación en los sistemas de conocimientos, para el logro de un aprendizaje significativo y desarrollador, que tenga en cuenta las potencialidades y limitaciones de los estudiantes, además de las exigencias sociales para las cuales deben prepararse.

#### Formas de representar una función

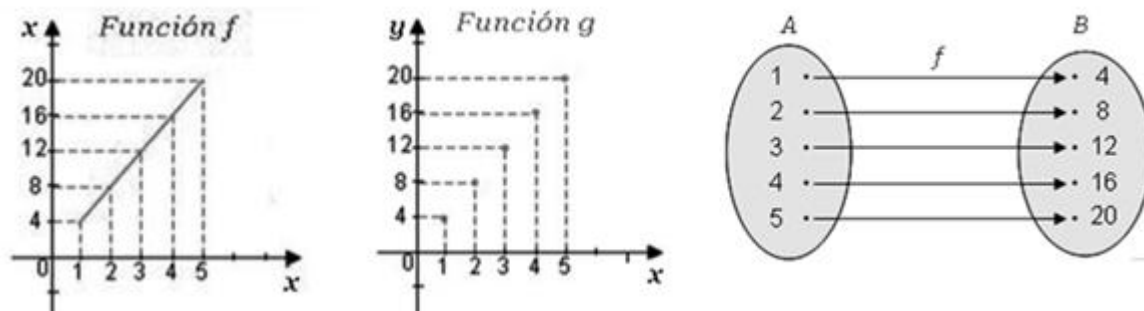
La diversidad de representaciones de las funciones posibilita que el profesor brinde un mejor tratamiento a los errores de los estudiantes. A estos últimos les permite el estudio de diversas facetas y propiedades de un mismo concepto o sistema conceptual, para el logro de una real comprensión de los contenidos y el desarrollo de sus capacidades. No se busca limitar el trabajo a una sola representación, sino por el contrario, que se estimule la utilización de las múltiples representaciones donde el estudiante tenga que analizar su equivalencia y el paso de un tipo de representación a otra. Con la incorporación de este organizador el docente, como exigencia, investiga e incrementa su preparación en el contenido específico objeto de estudio para poder organizar tal diversidad. También se persigue que los estudiantes aprendan a construir sus propias representaciones y evaluar las de otros, comprender representaciones no familiares y evaluar su pertinencia.

Además, se requiere consolidar la utilización adecuada de la terminología y simbología matemáticas, apoyándose en ocasiones en la construcción de diversas representaciones de funciones vinculadas a otras asignaturas. La tendencia que existe es a la presentación de esta diversidad de manera aislada, igual pasa con la diversidad desde la interdisciplinariedad. Aquí se busca la preparación necesaria para pasar de la presentación de esta diversidad aislada, desconectada, de representaciones de funciones a tener suficiente información organizada al respecto para desarrollar sistemas de representación interdisciplinar, donde se complementen mutuamente la diversidad de representaciones, como proceso matemático.

La introducción didáctica del concepto de función se basa en el uso de representaciones, por lo tanto, la visualización muchas veces va unida a características gráficas. Desde el punto de vista de la práctica didáctica una función se expresa a menudo en el registro visual mediante su gráfica cartesiana. Sin embargo, en ocasiones esto representa para el estudiante un problema para el aprendizaje, por cuanto, no se logra explorar distintas maneras de resolver un problema viendo sus diferentes representaciones.

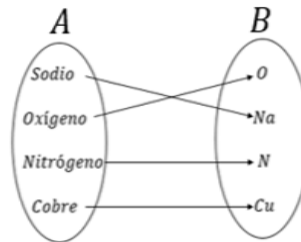
Verbal: Esta representación es de forma descriptiva o verbalmente. Se realiza mediante una descripción en palabras. Ejemplo:  $f$  es la función en la que a cada número real  $x$ , con  $1 \leq x \leq 6$ , le hace corresponder su cuádruplo.

Visual: Esta representación se realiza por medio de una gráfica. En esta forma, se puede representar mediante diagramas. Ejemplo: La función  $f$ , que expresa la variación del perímetro  $P$  de un cuadrado en función de la longitud  $l$  del lado, se representa en el siguiente diagrama.



El diagrama muestra un ejemplo interdisciplinar en el que se aprecia una correspondencia que a cada elemento del conjunto  $A$  asocia su símbolo químico en  $B$ .

Numérica: Esta representación es mediante una tabla o numéricamente. Se realiza por medio de una tabla de valores. Ejemplo: En la siguiente tabla se representa la función  $f$ , que expresa la variación del perímetro  $P$  de un cuadrado en función de la longitud  $l$  del lado.



$l$ : longitud de la altura (cm)	1	2	3	4	5
$P$ : Perímetro (cm)	4	8	12	16	20

En esta forma, se puede representar mediante un conjunto de pares ordenados. Ejemplo: Las funciones  $f$  y  $g$  están representadas a continuación mediante un conjunto de pares ordenados. En el caso de la función  $f$  expresa la variación del perímetro  $P$  de un cuadrado en función de la longitud  $l$  del lado que toma valores en el intervalo real  $l \in [1; 5]$ .

$$a) f = \{(1; 4); (2; 8); (3; 12); (4; 16); (5; 20)\}$$

$$b) g = \{(l; P): P = 4l; 1 \leq l \leq 5\}$$

La función  $f$  está representada por un conjunto finito de pares ordenados, en tanto  $g$ , por un conjunto infinito.

Algebraica: Esta representación es mediante una ecuación o algebraicamente. Se realiza por medio de una fórmula explícita. El conjunto siguiente de definición de la función  $f$  es finito de pares ordenados, en tanto el de  $g$ , es infinito.

$$\text{Función } f: y = f(x) = 4x, \text{ con } x \in (1; 2; 3; 4; 5)$$

$$\text{Función } g: y = g(x) = 4x, \text{ con } 1 \leq x \leq 5$$

Aplicaciones de las funciones

En Gamboa (2006, 2018) se puede profundizar en el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas tomando como bases sus aplicaciones prácticas. Las aplicaciones de las funciones proporcionan la oportunidad de aprendizaje a todos los estudiantes, en función de sus características personales, acerca del posible empleo de los contenidos estudiados en la vida cotidiana. De tal forma



se consideran las diferencias individuales para ayudar a aprender. Estas permiten realizar adaptaciones curriculares razonables y apropiadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje para proporcionar la posibilidad a todos de obtener logros. Al mismo tiempo, favorecen la promoción personal y social en el marco de la equidad, la igualdad de oportunidades y compensación de desigualdades. Como denominador común las funciones matemáticas tienen: Parámetros numéricos medibles, que caracterizan los estados de los sistemas denominadas: variables observables del sistema. Investigación de relaciones entre las variables observables. Evolución de las variables. Formulación de modelos para describir y predecir los fenómenos asociados a tales sistemas.

De tal forma existen múltiples aplicaciones de las funciones, en correspondencia con los múltiples sistemas de que se trate. Sin embargo, el trabajo con funciones no es exclusivo del mundo contemporáneo, desde las primeras civilizaciones se establecieron relaciones entre elementos de dos conjuntos que expresan correspondencias funcionales, estas evidencias se revelan en las tablillas de barro babilónicas de la colección Plimpton, que data del año 1900 a.n.e. La aplicación de las funciones en la práctica cotidiana y en el andar científico que acompañó al hombre, vienen desde la antigüedad, pero no se conoce por esos tiempos una definición formal rigurosa del concepto como el que utilizamos hoy.

En la actualidad, las funciones matemáticas están presentes en innumerables situaciones con las cuales interactuamos cotidianamente, y por supuesto, en variados fenómenos, sucesos y procesos que ocurren en la actividad científica. Algunos ejemplos de sus aplicaciones: En la descripción y cálculos relacionados con la Economía, la Física, la Química, el Deporte, los fenómenos naturales, y en otras áreas del conocimiento científico y social. Como fundamento y herramienta necesaria que sirve de base a la programación utilizadas en procesos dirigidos al desarrollo tecnológico en general. En la descripción y cálculos relacionados con las leyes de crecimiento. En la descripción y cálculos del ritmo de desintegración de sustancias radiactivas. En la construcción de obras arquitectónica. Un ejemplo que ha trascendido en el tiempo es el estilo creado por el arquitecto Catalán Antonio Gaudí (1852-1926), que utilizó arcos parabólicos y catenarios para lograr soportes estructurales innovadores en sus edificaciones. Múltiples son las aplicaciones de las funciones matemáticas, tantas que el mundo de hoy no podrá vivir sin ellas.

Las aplicaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas, por ejemplo, son diversas. Estas sirven de modelo para el análisis del crecimiento poblacional de los seres vivos y para calcular la velocidad de caída de cuerpos considerando la resistencia del aire. Otras aplicaciones son los modelos de decaimiento radioactivo y para la determinación de la concentración másica de algunas sustancias. También se emplean para determinar la edad de objetos antiguos, en la economía, y en varias escalas como la Richter y la intensidad del sonido (decibeles). Además, se utilizan en la medicina, la astronomía, la física y la informática.

## Relaciones interdisciplinarias

Las relaciones interdisciplinarias, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones, permiten lograr que los estudiantes comprendan la función de la actividad científico-técnica contemporánea en la sociedad actual, a partir de las relaciones con otras asignaturas. Esto requiere del desarrollo de habilidades, hábitos, cualidades, convicciones y actitudes con conocimientos profundos para alcanzar la independencia en la actividad cognoscitiva. Así se contribuirá a que perduren a lo largo de la vida, sean más sólidos y profundos, que permitan cumplir los objetivos comunes, sobre la base de las potencialidades que brindan los contenidos, los métodos, los medios, las formas de organización y la evaluación escolar.

La dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática teniendo presente las relaciones interdisciplinarias, permite estudiar los hechos, fenómenos y procesos en sus múltiples interrelaciones (Yoppiz, Cruz, Gamboa y Osorio, 2016), al considerar las funciones como potenciadoras de las relaciones de dependencia y complementariedad con los que se abordan en otras asignaturas. Contribuye a que el estudiante reconozca que lo que aprende le resulta útil para entender y comprender mejor los contenidos matemáticos, a partir de ver su significación con otras asignaturas y en el contexto donde se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Las funciones tienen amplias posibilidades para demostrar la interdisciplinariedad entre la Matemática con el resto de las asignaturas (Castillo y Gamboa, 2016, 2019). Existen nexos de interrelación recíproca y los contenidos de funciones se nutren de los de otras (Castillo, Gamboa y Borrero, 2017). A continuación, se muestra la aplicación de las funciones en las diferentes asignaturas.

Física: Interpretación de las relaciones funcionales que se manifiestan en los fenómenos estadísticos, como regularidad diferente a los fenómenos mecánicos y que estas se relacionan, entre otros factores, con el número de partículas del sistema y el carácter del movimiento molecular. Resolver problemas teóricos y experimentales, cualitativos y cuantitativos. Desarrollar habilidades de carácter experimental relacionadas con el modo de tabular los resultados, procesar los datos experimentales, determinando relaciones funcionales, argumentando las conclusiones del experimento realizado, utilizando tablas y gráficas en función del aprendizaje. Descripción del Movimiento Mecánico. Trabajo y energía. Ley de conservación de la energía mecánica. El movimiento de los cuerpos que rotan. Ley de conservación de la cantidad de movimiento angular. Oscilaciones mecánicas. Fenómenos ondulatorios, por funciones que se pueden descomponer en funciones trigonométricas. Teoría Cinética del gas ideal, fenómenos térmicos y fundamentos de termodinámica. Electrostática. Campo magnético. Física del átomo. Funciones exponenciales en la desintegración radioactiva. Elementos de Física nuclear.

Biología: Los valores de las funciones serán valores fácticos, por ejemplo, el valor del pH sanguíneo (logaritmo negativo de la concentración de iones de hidrógeno  $H^+$  en sangre) será un valor de función que exprese una de las propiedades más importantes del sistema humano, a saber, el equilibrio ácido-base. Otros ejemplos de propiedades representadas por funciones lo tenemos en: la coagulación sanguínea y el tiempo de protrombina, el recambio proteico y el nitrógeno total urinario, la mitosis y la velocidad de captación de timidina, entre otras aristas. Identificar funciones matemáticas para medir factores bióticos y abióticos en la descomposición de residuos y la formación de ésta. Así se puede razonar funciones matemáticas para comprender ciertos comportamientos biológicos de las ciencias naturales: La célula como unidad básica de estructura y función de los seres vivos. El ciclo celular incluye la división por mitosis o meiosis. Teoría celular es que toda célula procede, por división, de otra célula preexistente. Funciones exponenciales en la evolución de las poblaciones biológicas, la utilización de los medicamentos en el cuerpo humano, el coeficiente intelectual, determinación de la edad aproximada de un fósil. Origen de la diversidad de los sistemas vivientes en la Tierra. Los estilos de vida saludables. Problemas ambientales que influye en la pérdida de la biodiversidad. Diversidad del mundo vivo. Herencia.

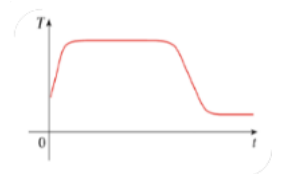
Geografía: Representaciones geográficas. Esfera terrestre. Los mapas. Escala. Red de coordenadas geográficas. Posición geomatemáticas. Proyecciones cartográficas. Las fajas geográficas de la Tierra.

Química: Las reacciones químicas. El comportamiento termoquímico y cinético de los procesos químicos. Equilibrio molecular. Equilibrio iónico. Reacción de oxidación-reducción. Electroquímica.

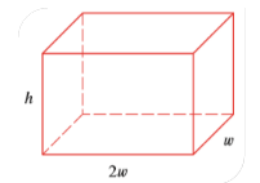
### *Ejercicios para tratamiento didáctico de funciones*

Los ejercicios para tratamiento didáctico de funciones desde sistemas de representación interdisciplinar pueden quedar de múltiples maneras. Una posibilidad sería la siguiente. Mediante un gráfico:

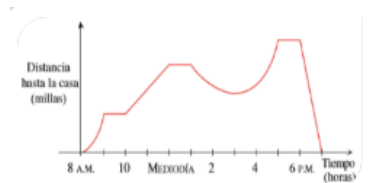
1. Cuando abre una llave de agua caliente, la temperatura  $T$  del agua depende de cuánto tiempo ha estado corriendo. Trace una gráfica aproximada de  $T$  como función del tiempo  $t$  que ha transcurrido desde que se abrió el grifo.



2. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con su parte superior abierta, tiene un volumen de  $10 m^3$ . La longitud de su base es el doble de su ancho. El material para la base cuesta 10 dólares por metro cuadrado y el material para los lados, cuesta 6 dólares por metro cuadrado. Exprese el costo del material como función del ancho de la base.

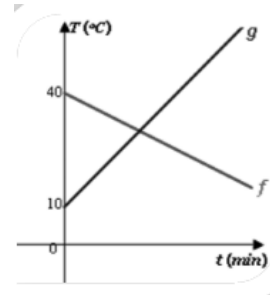


3. La gráfica que se muestra da la distancia a la que se encuentra un vendedor de su casa como función del

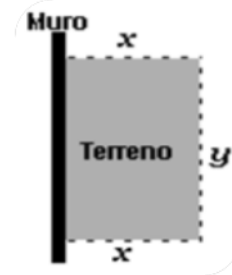


tiempo en cierto día. Describa con palabras lo que la gráfica indica con respecto al recorrido del vendedor en este día.

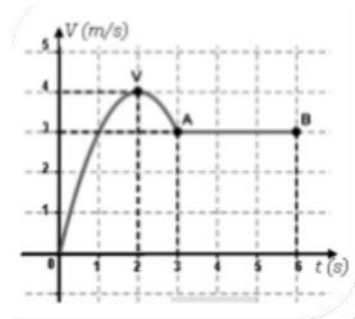
4. La gráfica muestra la variación de la temperatura  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) en función del tiempo  $t$  ( $\text{min}$ ) de dos mezclas  $f$  y  $g$ . Se conoce que la medición comenzó a realizarse a partir de las 8:00  $\text{am}$ , y una vez transcurrido 15  $\text{min}$  las mezclas  $f$  y  $g$  habían alcanzado  $25^{\circ}\text{C}$  y  $40^{\circ}\text{C}$  respectivamente. a) ¿Qué temperatura tenía la mezcla  $f$  cuando comenzó la medición? b) ¿Cuál de las dos mezclas presenta un proceso de enfriamiento? c) Halla la ecuación de la función lineal que puede describir cada proceso. d) ¿Qué tiempo necesita la mezcla  $f$  para alcanzar  $0^{\circ}\text{C}$ ? e) ¿A qué hora ambas mezclas tenían la misma temperatura?



5. Daniel y su esposa María quieren cercar un terreno rectangular para dedicarlo a la siembra de hortalizas. Uno de los lados del terreno coincide con un muro, por tanto, tendrán que cercar los otros tres lados. Si cuentan con 32  $\text{m}$  de cerca, cuáles son las dimensiones del terreno para que el área sea la mayor posible.



6. El gráfico corresponde a una función  $f$  que describe el comportamiento de la velocidad  $V$  de un móvil en función del tiempo  $t$ . Se conoce que el gráfico de  $f$  está compuesto por una curva parabólica de vértice  $V$  que contiene el origen de coordenadas y por el segmento de recta  $\overline{AB}$ . a) Durante qué tiempo se mantuvo aumentando la velocidad del móvil. b) ¿Cuál es el comportamiento de la velocidad del móvil en los últimos tres segundos? c) ¿Cuál fue la mayor velocidad alcanzada por el móvil? d) ¿A los cuántos segundos de haber partido el móvil alcanzó la mayor velocidad? e) Escribe cuál debe ser la ecuación de la función  $f$ .



Mediante una ecuación

1. Usted pone algunos cubos de hielo en un vaso, lo llena con agua fría y lo deja sobre una mesa. Describa cómo cambia la temperatura del agua a medida que pasa el tiempo. Después, trace una gráfica aproximada de la temperatura del agua como función del tiempo transcurrido.

2. Los biólogos han notado que la cantidad de chirridos que emiten los grillos de cierta especie está relacionada con la temperatura y la correspondencia parece ser casi lineal. Un grillo produce 113 chirridos por minuto a  $70^{\circ}\text{F}$  y 173 chirridos por minuto a  $80^{\circ}\text{F}$ . a) Encuentre una ecuación lineal que modele la temperatura como una función del número de chirridos por minuto  $N$ . b) ¿Cuál

es la pendiente de la gráfica? c) ¿Qué representa la pendiente? d) Si los grillos están chirreando a 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

3. Estudios recientes indican que la temperatura superficial de la Tierra se ha estado incrementando de manera firme. Algunos científicos han modelado la temperatura mediante la función lineal  $T = 0.02t + 8.50$ , donde  $T$  es la temperatura en  $^{\circ}\text{C}$  y  $t$  representa años desde 1900. ¿Qué representa la pendiente y la intersección a  $T$ ? Utilice la ecuación para predecir la temperatura superficial global al promedio del 2100.

4. En la superficie del océano la presión del agua es la misma que la presión del aire por arriba del agua,  $15 \text{ lb/pug}^2$ . Por debajo de la superficie, la presión del agua aumenta en  $4.34 \text{ lb/pug}^2$  por cada 10 pies de descenso. Exprese la presión del agua como función de la profundidad por debajo de la superficie del océano. ¿A qué profundidad es  $100 \text{ lb/pug}^2$  la presión?

5. Si la dosificación recomendada para un adulto de una droga es  $D$  (en  $\text{mg}$ ), entonces, para establecer la dosis apropiada  $c$  para un infante de edad  $a$ , el químico farmacéutico utiliza la ecuación  $c = 0.0417 D(a + 1)$ . Considere que la dosis para un adulto es  $200 \text{ mg}$ . a) Hallar la pendiente de la gráfica de  $c$ . ¿Qué representa? b) ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?

6. El crecimiento de un feto de más de 12 semanas se puede describir aproximadamente mediante la fórmula  $l(t) = at - 6.7$ , donde  $l$  representa la longitud en centímetros,  $t$  el tiempo en semanas y  $a$  es una constante real positiva. Si mediante un ultrasonido se comprobó que un feto de 18 semanas tenía una longitud de  $2.17 \text{ cm}$ , determina el valor de  $a$ .

7. Dos automóviles parten, siguiendo la misma trayectoria, con destino a una ciudad  $C$ . El primero de los automóviles viaja a una velocidad aproximada de  $70 \text{ km/h}$  y el segundo, que salió media hora más tarde, se desplaza a  $90 \text{ km/h}$ . Escribe las ecuaciones de las funciones lineales que describen la posición de los dos automóviles, una vez que ambos salieron. ¿Cuánto tiempo necesita el segundo automóvil para alcanzar al primero?

8. La relación entre el volumen  $V$  ( $\text{dm}^3$ ) y la temperatura  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ), de un gas a presión constante, está determinada por una función lineal, cuya ecuación es  $V(T) = V_0 + V_0 kT$ , en la que  $V_0$  es el volumen que ocupa el gas a  $0^{\circ}\text{C}$  y  $k$  una constante de proporcionalidad. a) Si el volumen de un gas  $G$  a  $0^{\circ}\text{C}$  es  $4.02 \text{ dm}^3$ , y a  $15^{\circ}\text{C}$  es  $4.8 \text{ dm}^3$ , determina el valor de  $V_0$  y el de  $k$ . b) Calcula el volumen del gas  $G$  a  $30^{\circ}\text{C}$ . c) ¿Qué temperatura debe alcanzar el gas  $G$  para que su volumen sea  $5.4 \text{ dm}^3$ ?

9. En una vista gráfica del GeoGebra construye los deslizadores correspondientes a los parámetros reales  $a$ ,  $d$ ,  $e$ ; y da entrada a la ecuación  $y = a(x + d)^2 + e$ . Ejecuta cada parámetro y verifica tus conocimientos sobre la influencia que estos tienen en el gráfico de la función.

10. En una vista gráfica del GeoGebra construye los deslizadores correspondientes a los parámetros reales  $a$ ,  $d$ ,  $e$ ; y da entrada a la ecuación  $y = a(x + d)^3 + e$ . Ejecuta cada parámetro y verifica tus conocimientos sobre la influencia que estos tienen en el gráfico de la función

11. En una fábrica de dispositivos electrónicos se utiliza la función de costo que describe la ecuación  $C(x) = 110x + 90$ , donde representa el número de dispositivos que se producen. Halla el costo de producir 500 dispositivos. ¿Cuántos dispositivos produjo la fábrica en una jornada si el costo de producción fue \$110900,00? ¿Cuál es el costo de producir un dispositivo más una vez que se han producido una cantidad  $k$ ?

12. La relación entre la temperatura medida en grados Celsius ( $C$ ) y grados Fahrenheit ( $F$ ), está representada por la igualdad. Esta relación es una función cuya ecuación es  $F = \frac{9}{5}C + 32$ . Si en el parte meteorológico del NTV se anuncia una temperatura de  $30^\circ\text{C}$  para la Región Central de Cuba. ¿Cuál es la medida de esta temperatura en grados Fahrenheit? ¿Si la temperatura es de  $0^\circ\text{C}$ , a cuántos grados Fahrenheit equivale? ¿A los cuántos grados Celsius se alcanza una temperatura de cero grados Fahrenheit? Traza el gráfico que describe los grados Fahrenheit en función de los grados Celsius.

13. Carlos quiere consumir  $70\text{ g}$  diarios de proteína vegetal. Si un alimento  $P$  tiene el  $35\%$  de proteína vegetal y el alimento  $Q$ , el  $20\%$  y Carlos quiere organizar su dieta obteniendo la proteína vegetal de estos dos alimentos: Escribe una ecuación que exprese la relación entre la cantidad de alimentos  $P$  y  $Q$  que debe consumir para obtener los  $70\text{ g}$  de proteína vegetal. Expresa la cantidad de alimento  $Q$  en función de la cantidad  $P$ . Si Carlos consume  $100\text{ g}$  del alimento  $P$ , ¿cuántos gramos debe consumir del alimento  $Q$  para completar su dieta? Traza el gráfico que describe la relación entre las cantidades de estos alimentos para conformar la dieta de Carlos.

14. Si un campesino cuenta con  $800\text{ m}$  de malla metálica para cercar un terreno de forma rectangular: ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno para que este tenga la mayor área posible? ¿Cuántos  $\text{hm}^2$  tiene el terreno rectangular de mayor área que puede cercar el campesino?

15. Los productos farmacéuticos deben especificar la dosis recomendada para adultos y para niños. Dos de las fórmulas que se han sugerido para obtener las dosis para niños a partir de las de los adultos son las siguientes: Regla de

Cowling:  $y = \frac{t+1}{24}a$ . Regla de Friend:  $y = \frac{2}{25}ta$ , donde  $a$  denota la dosis para adultos (en miligramos,  $mg$ ) y  $t$  indica la edad del niño en años. Para  $a = 100$ , gráfica las dos ecuaciones lineales en el mismo sistema de coordenadas en el intervalo. b) ¿Para qué edad las dos fórmulas especifican la misma dosis?

16. Algunos científicos piensan que el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra ha estado subiendo constantemente. El promedio de la temperatura de la superficie se puede modelar con  $T = 0.02t + 15.0$  donde  $T$  es la temperatura en  $^{\circ}C$  y  $t$  es años desde 1950. a) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección  $T$ ? b) Use la ecuación para pronosticar el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra en 2050.

17. En la superficie del océano, la presión del agua es la misma que la del aire que está sobre el agua,  $15 \text{ lb/pulg.}^2$ . Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta en  $4.34 \text{ lb/pulg.}^2$  por cada  $10 \text{ pies}$  de descenso. a) Encuentre una ecuación para la relación entre presión y profundidad debajo de la superficie del océano. b) Trace una gráfica de esta ecuación lineal. c) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección y de la gráfica? d) ¿A qué profundidad es de  $100 \text{ lb/pulg.}^2$  la presión?

Mediante una tabla

$t$	0	2	4	6	8	10	12	14
$T$	73	73	70	69	72	81	88	91

1. El 2 de junio de 2001 se tomaron lecturas de temperatura  $T$  (en  $^{\circ}F$ ) cada dos horas desde la medianoche hasta las 2:00 P.M. El tiempo  $t$  se midió en horas a partir de la medianoche. a) Utilice las lecturas para trazar una gráfica aproximada de  $T$  como una función de  $t$ . b) Utilice la gráfica que trazó para estimar la temperatura a las 11:00 A.M.

Tiempo $t$ que demora en realizar el trabajo	Parte $P$ del trabajo que realiza en una hora
1.5 horas	$P = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$
2 horas	$P = \frac{1}{2}$
2.5 horas	$P = \frac{1}{2.5} = \frac{2}{5}$
4 horas	$P = \frac{1}{4}$
$t$ horas	$P = \frac{1}{t}$

2. En una imprenta hay impresoras diferentes para realizar un mismo trabajo, cuyos tiempos varían desde 1,5 hasta 10 horas. ¿Cómo varía la parte del trabajo que puede realizar cada impresora en una hora, en función del tiempo total que necesita para realizarlo completamente?

	$x$	$y$	$S=x+y$	$P=xy$
1				
2	1	5,8	6,8	5,8
3	1,4142	5,3858	6,8	7,616598
4	2,6	4,2	6,8	10,92
5	3,2	3,6	6,8	11,52
6	3,9	2,9	6,8	11,31
7	4	2,8	6,8	11,2
8	4,1	2,7	6,8	11,07
9	2,205	4,595	6,8	10,13198
10	4,5	2,3	6,8	10,35
11	5	1,8	6,8	9
12	6	0,8	6,8	4,8
13	6,01	0,79	6,8	4,7479
14	6,5	0,3	6,8	1,95
15	6,7777	0,0223	6,8	0,151143

3. En las columnas  $A$  y  $B$  se muestran números reales positivos cuya suma es constante ( $S = x + y = 6,8$ ), pero el producto varía. ¿Cuál debe ser el par de números reales positivos que cumpla la suma y el producto sea el mayor posible? Halla el producto máximo. Representa en un sistema de

$t$	1990	1992	1994	1996	1998	2000
$N$	11	26	60	160	340	650

coordenadas rectangulares la relación entre el producto  $P$  y el número  $x$  ( $x \in \mathbb{R} < x < 6,8$ ).

4. En la tabla se exhibe el número  $N$  (en millones) de usuarios de teléfonos celulares en el mundo. (Se proporcionan estimaciones semestrales). a) Mediante los datos trace una gráfica de  $N$  en función de  $t$ . b) Utilice la gráfica para estimar la cantidad de usuarios de teléfono celular a mediados de año en 1995 y 1999.

## CONCLUSIONES

El establecimiento de un modelo conformado en tres subsistemas para el logro de coherencia en lo curricular, contextual e interdisciplinar, así como algunas sugerencias didácticas metodológicas en busca de la coherencia didáctica en el diseño del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, con su concreción en la práctica pedagógica, prepara a los agentes involucrados en un proceso de mezcla de lo personal y lo social para una educación de enriquecimiento humano. Se considera el contexto de aprendizaje y fuentes objetivas de conocimientos para diseñar el proceso de enseñanza-aprendizaje, a partir de una correcta organización que lleve exitosamente al desarrollo.

El diseño del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática teniendo en cuenta organizadores del currículo enfocados en la diversidad de representaciones del contenido matemático, sus aplicaciones y relaciones interdisciplinarias con las demás asignaturas y el contexto, constituye una vía que posibilita perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Esto mediante potenciar el trabajo con sistemas de representaciones interdisciplinarias para lograr así una mejor coherencia didáctica.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acosta, S., Gort, M., Quintana, A., Báez, L., García, L., González, C., . . . Domínguez, O. (2014). *Matemática 8vo grado*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Álvarez, M., Almeida, B. y Villegas, E. (2014). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Documentos metodológicos*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Ballester, S, García, J. E., Almeida, B., Álvarez, M. M., Rodríguez, M., González, R. A., ... y Púig, N. (2019). *Didáctica de la Matemática (Soporte digital)*. Tomo I.
- Campistrous, L., Miyar, O., Naredo, R., Rivero, H., Montes de Oca, E., y Durán, A. (1989). *Matemática 10mo Grado*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Castillo, Y. y Gamboa, M. E. (2016). Relaciones interdisciplinarias de las ciencias a partir de la Matemática en la Educación Preuniversitaria. *Didasc@lia: Didáctica y Educación*, 7(5), 131-154.
- Castillo, Y., Gamboa, M. E. y Borrero, R. Y. (2017) La enseñanza de la Matemática a partir de sus relaciones interdisciplinarias en la Educación Preuniversitaria. *Innovación Tecnológica*, 23(2).



Castillo, Y. y Gamboa, M. E. (2019). Unidades didácticas interdisciplinarias como alternativa para el diseño del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. *Innovación Tecnológica*, 25, 9-18.

\_\_\_\_\_ (2020a). *Funciones Matemáticas y su Didáctica para Docentes de Educación Media. Representaciones, aplicaciones y relaciones interdisciplinarias como organizadores de coherencia didáctica*. OmniScriptum Publishing Group, Mauritius: Editorial Académica Española.

\_\_\_\_\_ (2020b). *Unidades Didácticas para Matemáticas con carácter interdisciplinario. Los sistemas de representación interdisciplinar en Educación Preuniversitaria*. OmniScriptum Publishing Group, Mauritius: Editorial Académica Española.

Cruz, A. y Gamboa, M. E. (2020). Medios de enseñanza y aprendizaje para la Geometría en la formación de profesores de Matemática. *Didasc@lia: Didáctica y Educación*, 11(2), 289-313.

Fernández, H., Gamboa, M. E. y Rodríguez, M. (2016). Geogebra: un medio eficaz en la enseñanza de las funciones reales de una variable real. En M. Mesa (Presidencia), Las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones en la educación básica. Simposio llevado a cabo en la XVI Convención y Feria Internacional Informática 2016, La Habana, Cuba.

\_\_\_\_\_ (2017). Medios dinámicos para tratamiento didáctico de contenidos geométricos de Fundamentos de la Matemática Escolar. *Didasc@lia: Didáctica y Educación*, 8(5), 305-329.

Fernández, H., Gamboa, M. E., Rodríguez, M. y Alfonso, O. (2016). La Geometría asistida por Geogebra. *Boletín Redipe*, 5(2), 63-70.

Fernández, I., Riveros, V., y Montiel, G. (2017). Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación. *Omnia*, 23(1), 9-19.

Gamboa, M. E. (2006). Aprendizaje y enseñanza de la matemática tomando como bases sus aplicaciones prácticas. In VI Congreso Internacional Virtual de Educación.

\_\_\_\_\_ (2007). *El diseño de unidades didácticas contextualizadas para la enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria Básica*. Tesis doctoral en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Las Tunas.

\_\_\_\_\_ (2018). Utilidad de las matemáticas y sus implicaciones didácticas. Recuperado de <http://roa.ult.edu.cu/jspui/handle/123456789/3907>

\_\_\_\_\_ (2020). Escala estadística y software para evaluar coherencia didáctica en procesos de enseñanza-aprendizaje de Matemáticas. *Didasc@lia: Didáctica y Educación*, 11(1), 140-165.

Gamboa, M. E. y Borrero, R. Y. (2017). Influencia de los organizadores del curriculum en la planificación de la contextualización didáctica de la Matemática. *Boletín Redipe*, 6(1), 90-112.

Joaquim, O., Gamboa, M. E. y Fonseca, J. J. (2017). Las funciones lineales a partir de las acciones mentales de la teoría de Galperin. *Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores*, 4(2).

Santos, H. E. y Gamboa, M. E. (2017). El tratamiento propedéutico del concepto función en sexto grado de la enseñanza primaria. *Innovación Tecnológica*, 23.

Yoppiz, Y., Cruz, A., Gamboa, M. E. y Osorio, G. (2016). Alternativa didáctica para contribuir al perfeccionamiento de la planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la carrera Licenciatura en Educación Matemática-Física. *Boletín Redipe*, 5(5), 147-164.